2012年度
線型代数学演習B
No. 5 問題 (計量ベクトル空間その2)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathbb{R}^3$ における標準内積を $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 次の 3 つのベクトルは $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) ベクトル $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a_2}}{\|\boldsymbol{a}_1\|^2}\boldsymbol{a}_1$ を計算せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \dfrac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|^2}\boldsymbol{a}_1 - \dfrac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|^2}\boldsymbol{b}_2$ を計算せよ．

(4) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を正規化 (つまり単位ベクトル化) して $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を作れ．

以上のような手続きを <u>Schmidt の直交化法</u> という．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathbb{C}^3$ における標準内積を $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = w_1\overline{z_1} + w_2\overline{z_2} + w_3\overline{z_3}$ で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 次の 3 つのベクトルは $\mathbb{C}^3$ の基底であることを示せ:

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2) ベクトル $\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{c}_2 - \dfrac{\boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{c_1}}{\|\boldsymbol{c}_1\|^2}\boldsymbol{c}_1$ を計算せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{d}_3 = \boldsymbol{c}_3 - \dfrac{\boldsymbol{c}_3 \cdot \boldsymbol{c}_1}{\|\boldsymbol{c}_1\|^2}\boldsymbol{c}_1 - \dfrac{\boldsymbol{c}_3 \cdot \boldsymbol{d}_2}{\|\boldsymbol{d}_2\|^2}\boldsymbol{d}_2$ を計算せよ．

(4) $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_2, \boldsymbol{d}_3$ を正規化 (単位ベクトル化) して $\mathbb{C}^3$ の正規直交基底を作れ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ によって n 次以下の実係数多項式全体を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\langle f, g \rangle := \dfrac{1}{2}(f(0)g(0) + f(1)g(1))$ と定義すると，これは $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ 上の内積になることを示せ．

(2) 前問 (1) の $\langle f, g \rangle$ は $n \geq 2$ のとき $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ 上の内積に <u>ならない</u> ことを示せ．

(3) $(f, g) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ と定義すると，これは全ての $n \geq 1$ に対して $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ 上の内積になることを証明せよ．

(4) $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ を前問 (3) の内積に関して計量ベクトル空間とみなす．このとき $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ の基底 $1, x, x^2$ に対して (この順番で) Schmidt の直交化法を適用し，正規直交基底 $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ を求めよ．