2012年度

線型代数学演習B

No. 4 問題 (計量ベクトル空間その1)

1 (1) $\mathbb{R}^2$ を標準内積に関して計量ベクトル空間と見なす. このとき $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底でベクトル $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}$ を含むものを全て求めよ.

(2) $\mathbb{C}^2$ を標準内積に関して計量ベクトル空間と見なす. このとき $\mathbb{C}^2$ の正規直交基底でベクトル $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{4} \\ -\frac{3i}{4} \end{pmatrix}$ を含むものを全て求めよ. 但し i は虚数単位とする.

2 以下の写像は内積となるかどうか答えよ. (3) については a の値によって場合分けせよ.

(1) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}$ への写像

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}) := w_1\overline{z_2} + w_2\overline{z_1}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

(3) $a \in \mathbb{R}$ を定数として, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + x_2y_2, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

3 V を $\mathbb{C}$ 上の計量ベクトル空間とし, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ によって $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ の内積を表すことにする. また $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ のノルム (長さ), すなわち $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とする.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が V の <u>正規直交基底</u> であるとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して以下の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_j)|^2.$$

ヒント: まず $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_j$ の線形結合で表し, その係数を求めよ.

(2) $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ が V の <u>正規直交系</u> であるとき, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して以下の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \geq \sum_{j=1}^{m} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j)|^2. \qquad (*)$$

また $(*)$ において, 任意の $\boldsymbol{x}$ に対して等号が成り立つための必要十分条件は $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ が V の正規直交基底であることを示せ. ヒント: $\boldsymbol{x} - \sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_j)\boldsymbol{b}_j$ の長さに注目せよ.