2012年度

線形代数学演習B

No. 3 問題（連立一次方程式その２）

$\boxed{1}$ 次の性質を持つ行列を <u>簡約行列</u> と呼ぶ.

(i) 階段上の形をしている.
(ii) 各行の0でない最も左端の成分は1である.
(iii) 性質(ii)における1の上下の成分は全て0である.

即ち, 簡約行列とは以下のような形をした行列のことである.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

いま, 次の $\mathbb{R}$ 上の非斉次連立一次方程式を考える：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -6. \end{cases} \qquad (*)$$

(1) 方程式 $(*)$ の左辺の係数と右辺の定数項を並べて得られる次の行列を A とおく(この行列 A を方程式 $(*)$ の <u>拡大係数行列</u> と呼ぶ).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 6 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

このとき, 有限回の行基本変形により, A を簡約行列 A' に変形せよ.

(2) 方程式 $(*)$ は拡大係数行列 A を用いて次のように表すことができる.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, -1).$$

このとき, 小問(1)で求めた簡約行列 A' を用いて, 方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の $\mathbb{R}$ 上の連立一次方程式を考える：

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad + 3x_4 = b, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases} \qquad (**)$$

(1) 方程式 $(**)$ が解を持つために実数 b が満たすべき必要十分条件を求めよ.
(2) 方程式 $(**)$ が解を持つ b について, その一般解を求めよ.

問題は裏へ続く

$\boxed{3}$ 実数を係数とする以下の 2 つの多項式を考える:

$$f(x) = x^3 + px + q, \quad g(x) = ax^2 + bx + c.$$

(1) $f(x)$, $g(x)$ が共通の根 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つとする. このとき, 以下の $\mathbb{R}$ 上の連立一次方程式は非自明な解を持つことを示せ.

$$\begin{cases} x_1 + px_3 + qx_4 = 0, \\ x_2 + px_4 + qx_5 = 0, \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0, \\ ax_3 + bx_4 + cx_5 = 0. \end{cases}$$

(2) $f(x)$ が重根を持つとする (この重根は必然的に実数となるが, そのことは証明せずに用いてよい). このとき, $4p^3 + 27q^2 = 0$ が成り立つことを示せ.