2012 年度
線型代数学演習 B
No. 2 問題 (連立一次方程式その 1)

$\boxed{\mathbf{1}}$ (60 点)　次の性質を持つ行列を 簡約行列 と呼ぶ.

(i) 階段状の形をしている.

(ii) 各行の 0 でない最も左端の成分は 1 である.

(iii) 性質 (ii) における 1 の上下の成分は全て 0 である.

すなわち簡約行列とは以下のような形をした行列のことである.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

(1-i) 以下の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

A に行基本変形を有限回施すと, 以下の形の 簡約行列 A' になる:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A に行基本変形を有限回施して, A' を求めよ. つまり $a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}$ を具体的に求めよ.

(1-ii) 以下の $\mathbb{R}$ 上の連立一次方程式を考える.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

小問 (1-i) で求めた簡約行列 A' を用いて, この方程式の 基本解 を一組与えよ. ただし, この方程式の解空間 (つまり $\mathrm{Ker}\, A$) の基底のことを基本解と言う.

(2-i) 以下の行列 B を考える:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & -14 & -18 \end{pmatrix}.$$

B に行基本変形を有限回施すと, 以下の形の簡約行列 B' になる:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B に行基本変形を有限回施して, B' を求めよ. つまり a_{12}, a_{14}, a_{24} を具体的に求めよ.

(2-ii) 小問 (2-i) の結果を用いて, 以下の $\mathbb{R}$ 上の連立一次方程式の基本解を一組求めよ:

$$B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ （30 点）a を実数とし, 次の行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) a の値によって場合分けをして, A の階数を求めよ.

(2) x_1, x_2, x_3 に関する $\mathbb{R}$ 上の連立一次方程式 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の一般解を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ （30 点）a, b, c, a', b', c' を実数とする.

(1) $a \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$ を示せ.

(2) 2 つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が一次独立であるとき, x, y, z についての次の $\mathbb{R}$ 上の連立一次方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$$