2012年度

線型代数学演習B

No. 1 問題 (前期の復習)

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 以下の行列 A の行列式と, 存在するならば逆行列を求めよ:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 以下の行列 B の階数を求めよ:

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 4 & 12 \\ 3 & 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下のベクトル空間 V の部分集合 W は部分空間であるかどうか, 理由とともに答えよ. さらに, 部分空間である場合にはその次元を求めよ.

(1) $V = \mathbb{R}^3$ としたとき, その部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = a \right\}.$$

注：a による場合分けが必要になる.

(2)$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ を 4 次以下の実係数多項式全体のなすベクトル空間としたとき, その部分集合

$$W = \{p(x) \in V \mid p(1) = 0,\ p'(1) = 0\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ n 次正方行列全体を M_n と表す. $X, Y \in M_n$ に対して X, Y の交換子 $[X, Y] := XY - YX$ を考える.

(1) 任意の X, Y, Z に対して $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ が成り立つことを証明せよ (これを Jacobi の恒等式という).

(2) 行列 $A \in M_n$ を固定して, M_n から M_n への写像 $f_A : X \mapsto [A, X]$ を考える. このとき f_A は線型写像であることを示せ.

(3) (2) において, 特に 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2$ を考える. また E_{ij} を行列単位とする. すなわち (i, j) 成分のみ 1 で他の成分は 0 である行列とする. このとき M_2 の基底 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ に関して f_A の行列表示を求めよ. つまり

$$(f_A(E_{11}), f_A(E_{12}), f_A(E_{21}), f_A(E_{22})) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})B$$

となる 4 次正方行列 B を求めよ.