2013年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 I ＊○＊○＊○＊

復習テスト No. 3

2013年7月18日実施

1 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 上の同値関係を「$x \sim y \iff x = \lambda y$ なる $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在する」とし, $P^1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\!\sim$ とする. そして, $p : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$ を標準的な商写像とし, p により $P^1(\mathbb{C})$ に商位相を入れる. また, 任意の $x = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対して, $p(x) = [x] = [x_0 : x_1] \in P^1(\mathbb{C})$ と表すとする. いま, $f : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ を以下の写像とする.

$$f(x) = (2x_0x_1, x_0^2 + x_1^2), \quad x = (x_0, x_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}.$$

(1) f から $\widetilde{f} \circ p = p \circ f$ なる連続写像 $\widetilde{f} : P^1(\mathbb{C}) \longrightarrow P^1(\mathbb{C})$ が誘導されることを示せ.
(2) 任意の $[y] = [y_0 : y_1] \in P^1(\mathbb{C})$ に対して, $\widetilde{f}^{-1}([y]) \subset P^1(\mathbb{C})$ の濃度, 即ち, 元の個数を求めよ.
(ヒント: (2) $y_0^2 = y_1^2$ が成り立つか否か (このことは $[y_0 : y_1]$ の代表元のとり方に依らない) で場合分けせよ.)

2 K を体, V を K 上の有限次元ベクトル空間, $W \subset V$ を V の部分ベクトル空間とする. そして, V^*, W^* をそれぞれ V, W の双対空間とし, $W^\perp \subset V^*$ を以下で与えられる V^* の部分ベクトル空間とする.

$$W^\perp = \{f \in V^* \mid \text{すべての } w \in W \text{ について } f(w) = 0\}.$$

(1) $\Phi : V^* \longrightarrow W^*$ を $f \in V^*$ に対して, f の W への制限 $f|_W$ を対応させる線形写像とする. このとき, Φ から線形写像 $\overline{\Phi} : V^*/W^\perp \ni [f] = f + W^\perp \mapsto \Phi(f) = f|_W \in W^*$ が誘導されることを示せ.
(2) $\overline{\Phi}$ が線形同型写像であることを示せ.

3 $L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$, $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\}$, $L_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ とし, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^3 L_j$ とする. そして, D 上の次のベクトル場 X を考える.

$$X = \left(\frac{-3y}{x^2 + y^2} + \frac{2z}{x^2 + z^2}, \frac{3x}{x^2 + y^2} + \frac{-4z}{y^2 + z^2}, \frac{-2x}{x^2 + z^2} + \frac{4y}{y^2 + z^2}\right).$$

(1) $\mathrm{rot} X = 0$ を示せ.
(2) C_1, C_2, C_3 をそれぞれ以下の $l_1, l_2, l_3 : [0, 6] \longrightarrow D$ で与えられる曲線とする.

$$l_1(t) = \begin{cases} (t-1, -1, -1), & t \in [0, 2], \\ (1, t-3, -1), & t \in [2, 4], \\ (1, 1, t-5), & t \in [4, 6], \end{cases} \quad l_2(t) = \begin{cases} (-1, t-1, -1), & t \in [0, 2], \\ (-1, 1, t-3), & t \in [2, 4], \\ (t-5, 1, 1), & t \in [4, 6], \end{cases}$$

$$l_3(t) = \begin{cases} (-1, -1, t-1), & t \in [0, 2], \\ (t-3, -1, 1), & t \in [2, 4], \\ (1, t-5, 1), & t \in [4, 6]. \end{cases}$$

このとき, 線積分 $\displaystyle\int_{C_j} X \cdot dl_j$ $(j = 1, 2, 3)$ を計算せよ. ただし, 各 C_j 上では, t が増加する向きに積分するものとする.