2013年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 I ＊○＊○＊○＊

復習テスト No. 2

2013年6月20日実施

1 $S^2 = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, P^2 を S^2 に同値関係 $x \sim y \iff y = \pm x$ を入れて得られる商空間 $P^2 = S^2/\sim$ とし, $p_2 : S^2 \longrightarrow P^2$ を商写像とする. そして, S^2 には $\mathbb{R}^3$ の通常の距離を入れ, $d(p_2(x), p_2(y)) = \min\{|x-y|, |x+y|\}$ $(x, y \in S^2)$ として, P^2 を距離空間と考える. いま, $F : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を $F(x_0, x_1, x_2) = (x_1x_2, x_2x_0, x_0x_1)$ とし, $U = \{x = (x_0, x_1, x_2) \in S^2 \mid x_0x_1x_2 \neq 0\}$ とする.

(1) F の U への制限は, 単射 $f : p_2(U) \longrightarrow P^2$ を引き起こすことを示せ.

(2) $p_2(U) \subset P^2$ が開集合であることを示し, f が $p_2(U)$ 上連続であることを示せ.

2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ を3次複素行列とする.

(1) E_3 を3次単位行列とするとき, $xE_3 - A = \begin{pmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ -2 & x-1 & 2 \\ -2 & -2 & x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}[x])$ の単因子を求めよ.

(2) A の Jordan 標準形を求めよ.

3 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上のベクトル場 F を以下で与えられるものとする.

$$F(x, y) = {}^t\left(\frac{x-2y}{x^2+y^2}, \frac{2x+y}{x^2+y^2}\right).$$

また, 2点 $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を結ぶ D 内の曲線 C_1, C_2 を, 以下の写像 $l_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow D$, $l_2 : [0, 6] \longrightarrow D$ で与えられるものとする.

$$l_1(t) = \left(\sqrt{2}\cos\left(t - \frac{3\pi}{4}\right), \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)\right), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

$$l_2(t) = \begin{cases} (-1, t-1), & 0 \leq t \leq 2, \\ (t-3, 1), & 2 \leq t \leq 4, \\ (1, 5-t), & 4 \leq t \leq 6. \end{cases}$$

このとき, 線積分 $\int_{C_1} F$, および $\int_{C_2} F$ を求めよ. ただし, C_1, C_2 上で線積分を考える際は, t が増加する向きに積分するものとする.