2013年度
＊○＊○＊○＊　数学基礎演習I　＊○＊○＊○＊
復習テストNo. 1
2013年5月16日実施

1 $\mathbb{N}$で自然数全体のなす集合(0も元とする)を表し, 通常の加法, 乗法が入っているとする. この$\mathbb{N}$から整数全体の集合$\mathbb{Z}$を$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$により構成する. ただし, 同値関係は$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = a' + b$で与えられるものとする. いま, $\mathbb{Z}$の元(a, b), (a', b')について, その積を以下で定義する.

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + a'b).$$

(1) 上の積が代表元のとり方に依らずに定められることを(減法を用いずに)示せ.

(2) $\mathbb{N}$の元a, bについて, $c \in \mathbb{N} - \{0\}$が存在して$a = b + c$となるとき, $a > b$, あるいは$b < a$と表す(特に, $c \in \mathbb{N} - \{0\}$のとき$c > 0$). そして, $(a, b) \in \mathbb{Z}$について, $a > b$, $a = b$, $a < b$であるとき, それぞれ正, 零, 負であるという. この定義に基づいて, $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}$がともに負であるならば, その積$(a, b) \cdot (a', b') \in \mathbb{Z}$は正であることを(減法を用いずに)示せ. ここで, $\mathbb{N}$の性質「$a + c = b + c \implies a = b$」(このことより, $\mathbb{Z}$の元の符号は代表元のとり方に依らずに定められる), および「$a, b > 0 \implies ab > 0$」を証明なしで用いてよい.

2 a, b, cを複素数とし, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & c & 0 & 2 \end{pmatrix}$とする. このとき, a, b, cの値に注意して, Aに相似なJordan標準形, 即ち, 4次複素正則行列Pにより$P^{-1}AP$と表されるJordan標準形の具体的な形を求めよ(Pは求めなくてよい). ただし, Jordan細胞を並び替えて一致するJordan標準形は同じものとみなす.

3 nを$n \geq 2$なる整数, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x < y\} \subset \mathbb{R}^2$とし, D上の次の函数$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$を考える.

$$f(x, y) = \frac{1}{(1 + 5x^2 + 8xy + 5y^2)^n}.$$

(1) $x = \dfrac{r}{3}(\cos\theta - 3\sin\theta)$, $y = \dfrac{r}{3}(\cos\theta + 3\sin\theta)$なる変数変換について, Jacobian $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$を求めよ.

(2) 重積分$\displaystyle\iint_D f(x, y)\,dxdy$の値を$n$を用いて表せ.