2013年度

# ＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習I ＊○＊○＊○＊

## No. 11

2013年7月11日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n$ を正整数とし, $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ に同値関係「$x\sim y \iff y=\lambda x$ なる $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在する」を入れ, $P^n(\mathbb{C})=(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$ とする. そして, $p:\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow P^n(\mathbb{C})$ を標準的な全射とし, $P^n(\mathbb{C})$ に $p$ による商位相を入れる. また, $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ について, $p(x)=[x_0:x_1:\ldots:x_n]\in P^n(\mathbb{C})$ と表すとする. いま, $\mathbb{C}^{n+1}$ の $n$ 次元部分ベクトル空間 $H$ を一つ取る. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $p$ による $\mathbb{C}^{n+1}\setminus H$ の像は $\mathbb{C}^n$ と同相になることを示せ. ここで, $P^n(\mathbb{C})$ の部分集合 $U_0\subset P^n(\mathbb{C})$ を $U_0=\{[x_0:x_1:\ldots:x_n]\in P^n(\mathbb{C})\mid x_0\neq 0\}$ とし, $f_0:U_0\longrightarrow\mathbb{C}^n$ を $f_0([x_0:x_1:\ldots:x_n])=(x_1/x_0,\ldots,x_n/x_0)$ とするとき, $f_0$ が同相写像であることを用いてよい.

(2) (1) を用いて, $P^n(\mathbb{C})$ はハウスドルフ空間になることを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $K$ を体, $n$ を正整数, $V$ を $K$ 上の $n$ 次元ベクトル空間とし, $V^*$ を $V$ の双対空間とする. そして, 写像 $B:V\times V^*\longrightarrow K$ を, 以下のものとする.

$$B(v,f)=f(v),\quad v\in V,\ f\in V^*.$$

(1) $B$ は双一次形式 (双線形形式ともいう) であることを確かめよ.

(2) $v_1,\ldots,v_n\in V$ とする. このとき, $\{v_1,\ldots,v_n\}\subset V$ が $V$ の基底であることと, 任意の $f\in V^*$ について「$B(v_i,f)=0\,(i=1,\ldots,n)$ ならば $f=0$」が成り立つことは同値であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $O$ を $\mathbb{R}^3$ の原点とし, $\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$ 上のベクトル場 $X$ を, 以下で定める.

$$X(x,y,z)=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z).$$

(1) $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ の向きを $S^2$ が囲む有界領域に対して外向きに定めたとき, $S^2$ 上の $X$ の面積分を求めよ. ここで, $S^2$ の面積が $4\pi$ であることを用いてよい.

(2) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^4+z^6=80\}$ の向きを $M$ が囲む有界領域に対して外向きに定めたとき, $M$ 上の $X$ の面積分を求めよ.