2013年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 I ＊○＊○＊○＊

No. 10

2013年7月4日実施

1 複素射影空間 $P^n(\mathbb{C}) = P^n$ は $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ への $\mathbb{C}$ の乗法群 $\mathbb{C}^\times$ の作用 $a\cdot(x_0,\dots,x_n) = (ax_0,\dots,ax_n)$ による軌道集合 $P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^\times$ として定義される．そして，$x = (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ の同値類を $[x] = [x_0 : \dots : x_n]$ と表し，$p_0 : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P^n$ を標準的な全射 $p_0(x) = [x]$ として，P^n に商位相を入れる．さらに，$2n+1$ 次元単位球面 S^{2n+1} を $S^{2n+1} \cong \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ $(|x|^2 = \sum |x_i|^2)$ と実現し，S^{2n+1} での同値関係 $x \sim y \iff x = \lambda y,\ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1$ を考える．すると，包含写像 $f : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ により引き起こされる写像 $\overline{f} : (S^{2n+1}/\sim) \longrightarrow P^n$ は全単射になる．また，$g : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^{2n+1}$ を $(x_0,\dots,x_n) \mapsto (x_0/|x|,\dots,x_n/|x|)$ とすると，g は写像 $\overline{g} : P^n \longrightarrow S^{2n+1}/\sim$ を引き起こすが，これは $\overline{f}$ と互いに逆写像になる．これにより，射影 $p : S^{2n+1} \longrightarrow P^n$ による商位相は元の商位相と同相になる．これを位相 A ということにする．

(1) $d([x],[y]) = \min\{|x' - y'| ; x \sim x', y \sim y', x', y' \in S^{2n+1}\}$ が距離になることを示せ．

(2) 実射影空間と同様に $P^n = \cup_{i=0,\dots,n+1} U_i$，$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in P^n \mid x_i \neq 0\}$ であり，U_i 上の次の写像 $f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n$ は全単射である．

$$f_i([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i).$$

そこで，U_i を f_i により $\mathbb{C}^n$ と同一視して，その開集合を基とするような位相 B が考えられる．位相 B が位相 A と同相になること，および (1) で定めた距離による位相 M と同相になることを示せ．

(ヒント：$n+1$ 次ユニタリー群 $U(n+1) = \{A \in M_{n+1}(\mathbb{C}) \mid A^*A = E_{n+1}\}$ が S^{2n+1} と P^n に推移的に距離を保って作用することは認める．従って，$[e^{(0)}] = [1 : 0 : \dots : 0]$ の近くで同値な近傍系を与えていることを示せばよい．また，$2 - (2/\sqrt{x^2+1})$ が $[0, +\infty)$ 上の狭義単調増加な連続函数であることも使ってよい.)

2 K を体，a, b を相異なる K の元とする．また，$K[x]$ で K の元を係数とする多項式全体を表す．いま，$W = \{f(x) \in K[x] \mid f(a) = f(b) = 0\}$ とおく．

(1) $K[x]$ を K 上のベクトル空間とみなすとき，W は $K[x]$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(2) 商ベクトル空間 $K[x]/W$ の次元は 2 であることを示せ．

3 $\mathbb{R}$ 上の函数 $\phi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下のものとする．

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right),$$

$$\psi(t) = \cos t \left(= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right).$$

(1) 微分と積分の順序交換が許されることを確認したうえで，$\phi'(t) = -t\phi(t)$ が成立することを示せ．

(2) $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ を示せ．但し，$\phi(0) = 1$ であることは証明せずに用いて良い．

(3) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，次のことが成立することを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \left(\psi\big(t/\sqrt{n}\big) \right)^n = \phi(t).$$