

2013年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 9

2013年6月27日実施

- 1 実数の列による集合 $l^\infty = \{(x_n)_{n=0}^\infty \mid \sup_n(|x_n|) < +\infty\}$ を考える. この集合 l^∞ は, $d((x_n), (y_n)) = \sup_n(|x_n - y_n|)$ によって距離空間になる. l^∞ の原点 O を, $O = (0)_{n=0}^\infty \in l^\infty$ とする. このとき, 球面の類似である有界集合 $S = \{x \in l^\infty \mid d(x, O) = 1\}$ が考えられるが, この S は全有界にはならないことを示せ.
- 2 V, W を体 K 上の有限次元ベクトル空間, $\varphi : V \rightarrow W$ を線形写像とする. $V^* := \{f : V \rightarrow K \mid f \text{ は線形写像}\}$, $W^* := \{g : W \rightarrow K \mid g \text{ は線形写像}\}$ をそれぞれ V, W の双対空間とし, ${}^t\varphi : W^* \rightarrow V^*$ を φ の双対写像とする (${}^t\varphi$ は, $g \in W^*$ に $g \circ \varphi \in V^*$ を対応させる線形写像である). このとき, φ が単射であることと, ${}^t\varphi$ が全射であることは同値であることを示せ.
- 3 次の \mathbb{R}^3 上のベクトル場 X, Y について, X, Y がスカラーポテンシャルを持つかそうでないかを理由をつけて答えよ. また, スカラーポテンシャルを持つ場合には, それを一つ構成せよ. ここで, \mathbb{R}^3 上の関数 f がベクトル場 Z のスカラーポテンシャルであるとは, $\text{grad } f = Z$ となることを言う.

$$X(x, y, z) = (y^3 + 4x^3z, 2z^5 + 3xy^2, x^4 + 10yz^4),$$

$$Y(x, y, z) = (yz^2, zx^2, xy^2).$$