

2013年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 8

2013年6月13日実施

1 $S^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ とする. そして, $F : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ を $F(x_0, x_1, x_2) = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_1x_2, x_2x_0)$ として定義する. また, 正整数 n について, P^n を $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ に同値関係 $x \sim y \iff y = \pm x$ を入れて得られる商空間 $P^n = S^n / \sim$ とする. そして, S^n には \mathbb{R}^{n+1} の通常の距離を入れ, $p_n : S^n \rightarrow P^n$ を商写像とすると, $x, y \in S^n$ について, $d(p_n(x), p_n(y)) = \min\{|x - y|, |x + y|\}$ として, P^n を距離空間と考える.

(1) F は単射 $f : P^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ を引き起こすことを示せ.

(2) F は連続な単射 $\tilde{f} : P^2 \rightarrow P^5$ を引き起こすことを示せ.

2 V を体 K 上の有限次元ベクトル空間, V^* を V の双対空間とする.

(1) V の部分空間 W に対して, $W^\perp \subset V^*$ を以下で定義する.

$$W^\perp := \{f \in V^* \mid \text{任意の } w \in W \text{ に対して, } f(w) = 0\}.$$

このとき, W^\perp は V^* の部分空間であり, $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ であることを示せ.

(2) W_1, W_2 を V の部分空間とする. このとき, $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ を示せ.

3 $F(x, y) = \left(\frac{-y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ を \mathbb{R}^2 上のベクトル場, a, b を正実数とし, $D \subset \mathbb{R}^2$ を次で与えられる部分集合とする.

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

∂D によって D の正の向き境界を表すとき, 次の線積分の値を求めよ.

$$\int_{\partial D} F.$$