2013年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習I ＊○＊○＊○＊

No. 7

2013年6月6日実施

1 (1) $\{a_i \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 1 \le i \le n+1\}$ を一次独立な $n+1$ 個のベクトルの集合とする. 各 i にたいして, n 次元球面 S^n の二つの部分集合 $U_i^{\pm} = \{x \in S^n \mid \pm\langle a_i, x\rangle > 0\}$ が定義される. ここで, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の標準的な内積を意味する. このとき, これら $2(n+1)$ 個の集合の族 $\{U_i^{\pm} \mid 1 \le i \le n+1\}$ は S^n の開被覆になることを示せ.

(2) $\{p(U_i^{+}) \mid 1 \le i \le n+1\}$ は P^n の開被覆になることを示せ. ただし, $p : S^n \longrightarrow P^n$ は標準的な商写像, 即ち, S^n 上の同値関係「$x \sim y \iff y = \pm x$」に関する商空間として P^n を定義したときの商写像とする.

2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -7 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ を3次の複素正方行列とする.

(1) $xE - A = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ -3 & x-2 & 1 \\ 7 & 1 & x-4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}[x])$ の単因子を求めよ.

(2) A の Jordan 標準形を求めよ.

3 $\mathbb{R}^2$ 上の滑らかなベクトル場 X と実数 $\alpha > 1$ が, すべての $p \in \mathbb{R}^2$ に対して, 以下をみたしているとする.

$$(\|p\|^{\alpha} + 1) \cdot \|X(p)\| \le 1.$$

ここで, $\|p\|$ はユークリッドノルムを表すとする. $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ $(r > 0)$ とするとき, X の C_r 上の線積分について, 次が成り立つことを示せ. ただし, C_r 上では正の向きに積分するものとする.

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} X \cdot dl = 0.$$