2013年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習I ＊○＊○＊○＊

No. 6

2013年5月30日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) n次元実射影空間P^nはn次元球面$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$上に同値関係$x \sim y \iff x = \pm y$を入れることにより$P^n = S^n/\sim$と定義され, その商写像を$p : S^n \longrightarrow P^n$と表すとする. そして, P^nの距離dを$d(p(x), p(y)) = \min(|x-y|, |x+y|)\,(x, y \in S^n)$で入れる. 任意の$x \in S^n$について, $p(x) = \alpha \in P^n$と表すとき, $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ならば, $d(\alpha, \beta) < \varepsilon$なる$\beta \in P^n$に対して, $p(y) = \beta$なる$y \in S^n$で, $|x-y| < \varepsilon$を満たすものがただ一つ存在することを示せ.

(2) $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R}) = \{n+1$次実正則行列$\}$とする. すると, 任意の$x \in S^n$について$|Ax| \neq 0$であるから, 連続写像$f_A : S^n \longrightarrow S^n$を$f_A(x) = Ax/|Ax|$で定義できる. この$f_A$は, 連続写像$F_A : P^n \longrightarrow P^n$を誘導すること, 即ち, $F_A \circ p = p \circ f_A$なる連続写像$F_A$がただ一つ存在することを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Kは体とする. そして, K係数1変数多項式$a(x), b(x) \in K[x]$はいずれも0でないとする. いま, $a(x), b(x)$の最大公約元を$d(x)$, 最小公倍元を$\ell(x)$で表す.

(1) $g(x)a(x) + h(x)b(x) = d(x)$となる$g(x), h(x) \in K[x]$が存在することを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & b(x) \end{pmatrix}$は, $M_2(K[x])$における行と列に関する基本変形を繰り返すことで, $\begin{pmatrix} d(x) & 0 \\ 0 & \ell(x) \end{pmatrix}$となることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$上のベクトル場$F(x, y) = {}^t\!\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$を考える.

(1) $C_1 = \{(\cos t, \sin t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$を単位円周とするとき, 次の線積分の値を求めよ. ただし, 線積分の向きはtが増加するようにとる.

$$\int_{C_1} F.$$

(2) 閉曲線C_2を以下で定義する.

$$C_2 = \begin{cases} (1+t, 0) & (0 \leq t \leq 1 \text{ のとき}), \\ (2, t-1) & (1 \leq t \leq 2 \text{ のとき}), \\ (4-t, 3-t) & (2 \leq t \leq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき, 次の線積分の値を求めよ. ただし, 線積分の向きはtが増加するようにとる.

$$\int_{C_2} F$$