

2013年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 5

2013年5月23日実施

- 1 3次実正方行列全体の集合 $M = \{x = (x_{ij})\}$ を, 9次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^9 と同一視して通常の距離を入れる. そして, 部分集合 $Y_k = \{x \mid \text{rank } x \leq k\} \subset M$ ($0 \leq k \leq 3$) を考える. 例えば, $Y_0 = \{0\}$ なので, これは閉集合になる.
- (1) Y_2 は M の閉集合になることを示せ.
- (2) Y_1 も M の閉集合になることを示せ.
- 2 a, b を $(a, b) \neq (0, 0)$ である2つの整数とする. そして, $d > 0$ を a, b の最大公約数とする. このとき, $na + mb = d$ となる整数 n, m が存在することを示せ.
- 3 2次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 から原点を除いた集合を U と置き, \mathbb{R}^2 から半直線 $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ を除いた集合を V と置く. いま, U 上のベクトル場 X を, 次で定める.

$$X(x, y) = \left(\frac{x - y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2} \right).$$

そして, X の V への制限として定まる V 上のベクトル場を X' とする.

- (1) X' は V 上のベクトル場としてスカラーポテンシャルを持つ, 即ち, V 上の滑らかな函数 f で, その勾配ベクトル場が X' となるものが存在することを示せ.
- (2) X はスカラーポテンシャルを持たない, 即ち, U 上の滑らかな函数 f で, その勾配ベクトル場が X となるようなものは存在しないことを示せ.