

2013年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 4

2013年5月9日実施

1 有理数全体のなす集合 \mathbb{Q} を $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})) / \sim$ として定義する. ただし, $\mathbb{N} - \{0\} = \{a \in \mathbb{N}; a \neq 0\}$ であり, 同値関係は $(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b$ で与えられるものとする. このとき, \mathbb{Q} 上の関係 \leq を $(a, b) \leq (a', b') \iff ab' \leq a'b$ により定義すると, \mathbb{Q} に順序が入る. このことを以下の手順で示せ.

(1) $0 = (0, 1)$ と定義する. このとき, $(a, b) \leq 0 \iff a \leq 0$ を示せ. また, $(a, b) \leq 0$ ならば, $(a, b) \sim (a', b')$ となるとき $(a', b') \leq 0$ が成り立つことを示せ.

(2) \leq により \mathbb{Q} 上の順序関係が定義されること, 即ち, \leq が代表元に依らずに定められること, および順序の公理をみたすことを示せ.

2 (1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対して, $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形になるような正則行列 P を一つ求め, そのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

(2) $n \geq 1$ に対して, A^n を計算せよ.

3 $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\} \setminus \{(0, 0)\}$ とし, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のものとする.

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(1) f は K 上広義積分可能でないことを示せ.

(2) 集合 K のふたつの近似列 $(K_n), (L_n)$ を以下によって定める.

$$K_n = \left\{ (x, y) \in K \mid \frac{1}{n} \leq y \right\}, \quad L_n = \left\{ (x, y) \in K \mid \frac{1}{n} \leq x \right\} \quad (n \geq 1).$$

このとき, 次のふたつの極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} f.$$