

2013年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 2

2013年4月18日実施

1 $f : X \rightarrow X$ を写像とする. $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$ は f のグラフ, $\Delta = \{(x, x)\}$ は対角線集合で, いずれも $X \times X$ の部分集合になる. また, $c : X \times X \rightarrow X \times X$, $p : X \times X \rightarrow X$ をそれぞれ $c(x, x') = (x', x)$, $p(x, x') = x$ で定義する.

(1) p により $\Gamma_f \cap \Delta \cong \{x \mid x = f(x)\}$ となる, 即ち, 写像 p の $\Gamma_f \cap \Delta$ への制限は $\{x \mid x = f(x)\}$ への全単射となることを示せ.

(2) $c(\Gamma_f)$ がある写像 $g : X \rightarrow X$ のグラフであるための必要十分条件は, f が全単射であることを示せ.

2 N を次の 5 次複素正方行列とする.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

この問題では, $P^{-1}NP$ がジョルダン標準形となるような正則行列 P を一つ求め, そのときの $P^{-1}NP$ を求める.

(1) $N^2 \neq 0, N^3 = 0$ を確かめよ. また, $N^2 u_1 \neq 0$ となる $u_1 \in \mathbb{C}^5$ を一つ求めよ.

(2) 任意のベクトル $v \in \mathbb{C}^5$ に対して, Nv は $Nu_1, N^2 u_1$ の一次結合で表せることを示せ.

(3) $u_1, Nu_1, N^2 u_1, u_2, u_3$ が, \mathbb{C}^5 の基底となるような $u_2, u_3 \in \mathbb{C}^5$ で, $Nu_2 = 0, Nu_3 = 0$ となるものを一組求めよ.

(4) $P^{-1}NP$ がジョルダン標準形となるような正則な 5 次複素正方行列 P を一つ求め, そのときの $P^{-1}NP$ を求めよ.

3 関数 $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を, 次で定義する.

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2} & (0 < x < y < 1 \text{ のとき}), \\ -x^{-2} & (0 < y < x < 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

このとき, $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ を示せ.