

2013年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 1

2013年4月11日実施

- 1 (1) 写像 $f : A \rightarrow B$ と B の部分集合 B' について $f(f^{-1}(B')) \subset B'$ を示せ.
(2) また, 等号 $f(f^{-1}(B')) = B'$ が成り立たない例を一つ与えよ.
(3) 与えられた f にたいして $f(f^{-1}(B')) = B'$ となる B' の必要十分条件を与えよ.

- 2 V を \mathbb{C} 上の有限次元ベクトル空間とし, W_1, W_2, \dots, W_m を V の部分空間とする.
このとき, 次の3つの条件は互いに同値であることを示せ. (この同値な条件を満たすとき, V は W_1, W_2, \dots, W_m の直和 [内部直和ともいう] であるといい, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$ と書く.)
(i) 任意の $v \in V$ は, $v = w_1 + w_2 + \dots + w_m$ ($w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_m \in W_m$) の形に表される. さらに, w_1, w_2, \dots, w_m は v からただ一通りに定まる.
(ii) $V = W_1 + W_2 + \dots + W_m$ であり, 任意の $k = 2, \dots, m$ について, $W_k \cap (W_1 + W_2 + \dots + W_{k-1}) = \{0\}$ が成り立つ.
(iii) $V = W_1 + W_2 + \dots + W_m$ であり, $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \dots + \dim W_m$ が成り立つ.

- 3 次で与えられる \mathbb{R}^2 の部分集合 A を図示し, A 上の次の重積分を計算せよ.

$$\iint_A xy \, dx dy, \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x(2-x)\}.$$