2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習II ＊○＊○＊○＊

復習テストNo. 3

2012年1月19日実施

1 p, q を異なる2素数とし, 群 G の位数は pq で割り切れるとする.
(1) G は位数 p の元を持つことを示せ.
(2) G は位数 pq の元を持つとは限らない. このことを示すために, 適当な p, q について, 位数 pq の元を持つ例と持たない例をそれぞれ1つずつ挙げよ.

2 2次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, ;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上の点 $P = (1, 0, 0)$ のまわりの局所座標として (y, z) を取る.
(1) P における次の偏微分係数を求めよ.

$$\frac{\partial x}{\partial y}(P), \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(P), \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}(P).$$

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $f(x, y, z) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実定数) の S^2 への制限 $\tilde{f}$ は, 点 P を臨界点に持つことを示せ. また, P が $\tilde{f}$ の非退化な臨界点であるかどうか調べ, 非退化ならば指数を求めよ.

3 $C = \{z \in \mathbb{C}\, ;\, |z| = 2\}$ とする. このとき, 以下の問に答えよ. ただし, C 上で積分を考えるとき, 正の向きに積分するものとする.
(1) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \overline{z}\,dz = 4$ であり, $n > 1$ なる整数 n について, $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \overline{z}^n dz = 0$ であることを示せ.
(2) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を正則函数とする. このとき, 積分 $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_C \mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) dz$ を f の高階微分係数 (f 自身の値も含む) を用いて表せ.

4 (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$) を求めよ.
(2) (1) の A について, 次の微分方程式の初期値問題の解 $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ を求めよ.

$$\frac{dx}{dt} = Ax + e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$