

2011年度

* ○ * ○ * ○ * **数学基礎演習 II** * ○ * ○ * ○ *

復習テスト No. 2

2011年12月22日実施

- 1 (1) $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ が環として同型であることを, 同型写像を作ることに
より示せ.
(2) $\mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$ の乗法に関する可逆元のなす群 $(\mathbb{Z}/75\mathbb{Z})^\times$ の位数を求めよ.

- 2 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上のベクトル場で, 自明でないもの, 即ち, 少なくとも1点 $p \in S^2$ で零ベクトルでないベクトルをとるベクトル場と, その積分曲線
で定値写像でないものの例を与えよ.

- 3 $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ を正則函数とし, $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ を以下で定義する.

$$g(x + iy) = \overline{f(-x + iy)}, \quad x, y \in \mathbb{R}, x + iy \in D.$$

- (1) g は D 上の正則函数であることを示せ.
(2) $S = \left\{ \frac{i}{n} \in \mathbb{C}; n \text{ は正整数} \right\}$ とする. このとき, f が S 上で実数値をとり, (必然的に S 上で f と g は一致するが) D 上では f と g が一致しない f の例を1つ与えよ.

- 4 次の微分方程式の (実数値函数としての) 一般解を求めよ.

$$x'' + 4x' + 4x = te^{-t}.$$