2011 年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 II ＊○＊○＊○＊

復習テスト No. 1

2011 年 11 月 10 日実施

1 $G = GL_2(\mathbb{R}) = \{A; 実 2 次正方行列, \det A \neq 0\}$ を行列の積に関して群とみなす. G の部分群 H, K で次の条件をみたすものの例を挙げよ.

(1) H は正規部分群ではない.

(2) K は G ともスカラー行列からなる部分群とも異なる G の正規部分群である. (ただし, スカラー行列とは単位行列のスカラー倍の行列のこと.)

2 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を次で定める.

$$M = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; -x^2 + 2y^3 + z^2 - 6yw^2 = -2xz + 6y^2w - 2w^3 = 1\right\}.$$

このとき, M は 2 次元多様体 (正確には $\mathbb{R}^4$ の 2 次元部分多様体) であることを示せ.

3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ を複素級数とする. このとき, 次の問に答えよ. ただし, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限, 下極限を表すとする.

(1) $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ なるとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束することを, 等比級数である優級数を与えることにより示せ.
(2) (1) において, 上極限を下極限に変えると主張は正しくない. このことを示す反例として, $\displaystyle 0 < \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$, かつ発散する級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ を 1 つ与えよ.

4 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2}.$$