2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習II ＊○＊○＊○＊

No. 11

2012年1月12日実施

1 4次対称群 S_4 のシロー2部分群を1つ求めよ. ただし, 次で与えられるクラインの4元群 V が S_4 の正規部分群であることは, 証明なしして用いてよい.

$$V = \{\mathrm{id},\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}.$$

ここで, id は4次の恒等置換を表す.

2 2次元多様体 $\mathbf{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y > 0\}$ のリーマン計量 $g = (g_{(x,y)})_{(x,y)\in\mathbf{H}}$ を, $(x,y) \in \mathbf{H}$,$v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in T_{(x,y)}\mathbf{H} = \mathbb{R}^2$ に対して, 次のように定める.

$$g_{(x,y)}(v,w) = \frac{1}{y^2}(v_1w_1 + v_2w_2).$$

また, $(-1,1)$ と $(1,1)$ を結ぶ曲線 $l, l_* : [-1,1] \longrightarrow \mathbf{H}$ を $l(t) = (t, \sqrt{2-t^2})$, $l_*(t) = (t,1)$ で定める. 上のリーマン計量 g に関する l, l_* の長さを $L(l)$, $L(l_*)$ としたとき, $L(l) < L(l_*)$ であることを示せ.
(ヒント : $\sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$, $e > \dfrac{5}{2}$ である.)

3 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ とする. このとき, 次の領域 $D \subset \mathbb{C}$ における原点を中心とするローラン展開を求めよ.
(1) $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$.
(2) $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\ 1 < |z| < 2\}$.

4 y, A, f を以下のものとする.

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ f(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

このとき, 次の初期値問題の解を求めよ.

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$