2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 II ＊○＊○＊○＊

No. 10

2012年1月5日実施

1 $GL_2(\mathbb{R})$ の各共役類の代表元として, 次のいずれかの形の元をとることができることを示せ.

$$\begin{pmatrix} -a & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad (a, b \in \mathbb{R},\, b \neq 0), \qquad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

2 $\mathbb{R}^n$ の開部分集合 U 上の C^∞ 級函数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を, 次で定める.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

(1) f がモース函数であること, 即ち, すべての臨界点が非退化であるということと, $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ が ∇f の正則値であることが同値であることを示せ.
(2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積をあらわすものとする. いま, $v \in \mathbb{R}^n$ に対して, $f_v : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f_v(x) = f(x) - \langle v, x \rangle$ で定める. このとき, f_v がモース函数となるような $v \in \mathbb{R}^n$ が存在すること示せ. (ヒント : サードの定理を用いよ.)

3 (1) リウビル (Liouville) の定理を述べよ.

(2) リウビルの定理を用いて, n 次多項式 $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ (n は正整数, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$) について, 方程式 $P(z) = 0$ が $\mathbb{C}$ において解をもつことを示せ.

4 以下の各行列 A について, 指数函数 $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ を求めよ. ただし, A^0 は単位行列とする.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.