

2011 年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 II * ○ * ○ * ○ *

No. 9

2011 年 12 月 27 日実施

- [1] 以下のアーベル群について, どの群たちが同型であるか, そして, 同型にならないかを調べよ. ただし, 正整数 n について, $(n) = n\mathbb{Z}$ は n の倍数全体のなす $\mathbb{Z}$ の (加法に関する) 部分群とする.

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathbb{Z}/(360) \oplus \mathbb{Z}/(300), & A_2 &= \mathbb{Z}/(216) \oplus \mathbb{Z}/(500), \\ A_3 &= \mathbb{Z}/(180) \oplus \mathbb{Z}/(600), & A_4 &= \mathbb{Z}/(8) \oplus \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(3375). \end{aligned}$$

- [2] 3 次元球面 $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ 上の C^∞ 級関数 $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3.$$

- (1) $p_1 = (1, 0, 0, 0)$, $p_2 = (0, 0, 0, 1)$ が f の臨界点であることを示せ.
(2) p_1, p_2 のそれぞれについて, f の非退化な臨界点であるかどうかを調べよ. また, 非退化であるときは, その指数を計算せよ.

- [3] 次の積分の値を求めよ.

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(2z+1)}.$$

- [4] $[0, 1] \times \mathbb{R}$ 上で定義された有界連続関数 $f(t, x)$ を, 以下のように定義する.

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & t = 0, -\infty < x < \infty, \\ 2t, & 0 < t \leq 1, -\infty < x \leq 0, \\ 2t - \frac{4x}{t}, & 0 < t \leq 1, 0 < x < t^2, \\ -2t, & 0 < t \leq 1, t^2 \leq x < \infty. \end{cases}$$

ここで, 次で与えられる初期値問題を考える.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = 0$$

このとき, 以下で与えられる, この初期値問題に対する $0 \leq t \leq 1$ におけるピカールの近似列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ が $n \rightarrow \infty$ になるとき, $0 < t \leq 1$ において収束するかどうか調べよ.

$$x_0(t) = 0, \quad x_n(t) = \int_0^t f(s, x_{n-1}(s)) ds, \quad n \geq 1.$$