2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習II ＊○＊○＊○＊

No. 8

2011年12月15日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ p を素数, n を正整数とし, 次の集合を考える.

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times := \{\alpha = \overline{a} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\,;\, a \in \mathbb{Z},\ \alpha \text{は} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \text{の可逆元}\}.$$

このとき, $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ は乗法に関して群をなすことを示し, その位数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $M \subset \mathbb{R}^n$ を m 次元多様体とする. $v \in \mathbb{R}^n$ 対して, 多様体 $M + v \subset \mathbb{R}^n$ を $M + v = \{x+v\,;\, x \in M\}$ で定める. いま, $k > \dfrac{m}{n-m}$ であるとする. このとき, $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ で, 次の性質をみたすものが存在することを示せ.

$$M \cap \bigcap_{i=1}^{k} (M + v_i) = \emptyset.$$

(ヒント: M^{k+1} で M を $(k+1)$ 個直積した $(k+1)m$ 次元多様体を表わすものとして, $F(x_0, \ldots, x_k) = (x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k)$ で定まる写像 $M^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{kn}$ の像を考える.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ $C = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ とする. このとき, 積分 $\displaystyle\int_C |z-1||dz|$ を求めよ. ただし, C 上では正の向きに積分するものとする.

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を正実数とし, 有界閉区間 $I = [0, a]$ で定義された連続函数 f が $\displaystyle\sup_{t \in I} |f(t)| < 1$ をみたすとする. いま, $x_0(t) = 0$ (定数函数) とし, 以下の微分方程式の解として, 帰納的に I 上の函数 x_n $(n \geq 1)$ を定義する.

$$x_n'(t) + 2x_n(t) = f(t)(1 + x_{n-1}(t)), \quad x_n(0) = 0.$$

(1) I 上の連続函数 g に対して, $\|g\| = \displaystyle\sup_{t \in I} |g(t)|$ と表すことにする. このとき, 任意の正整数 $n > 0$ に対して, 以下を示せ.

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2}\|x_n - x_{n-1}\|.$$

(2) 函数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ はある函数 x に I 上一様収束し, x は次の微分方程式の解であることを示せ.

$$x'(t) + 2x(t) = f(t)(1 + x(t)), \quad x(0) = 0.$$