2011 年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 II ＊○＊○＊○＊

No. 7

2011 年 12 月 8 日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ a, b を正整数とし, d を a, b の最大公約数, 即ち, $d = \max\{n \in \mathbb{Z}\,;\, n > 0,\, n|a,\, n|b\}$ とする. ただし, $n|a$ とは, a が n で割り切れることを表す. このとき, a, b が生成する $\mathbb{Z}$ のイデアル (a, b) は, d が生成する $\mathbb{Z}$ のイデアル (d) に一致することを示せ. ここで, 整数全体のなす環 $\mathbb{Z}$ が単項イデアル整域であることは用いてよい.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上のベクトル場 Y を, 次で定める.

$$Y(x, y, z) = (-xz, -yz, 1 - z^2), \quad (x, y, z) \in S_2.$$

$p \in S^2$ を，$p \neq (0, 0, \pm 1)$ をみたす点とし, $l : \mathbb{R} \longrightarrow S^2$ を $l(0) = p$ であるような Y の積分曲線とする.

(1) すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して, $l(t) \neq (0, 0, \pm 1)$ であることを示せ.

(2) $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y, z) = z$ で定めたとき, すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{d(f \circ l)}{dt}(t) > 0$ が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} l(t) = (0, 0, 1)$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 指数関数 $f(z) = \exp z$ を, $\mathbb{C}$ 上でも $\displaystyle\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ なるものと定義する. いま, $\displaystyle g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を $\mathbb{C}$ 上で定義された整級数とする. このとき, 以下で与えられる $\mathbb{C}$ の部分集合 $S \subset \mathbb{C}$ について, $f(z) = g(z)\,(z \in S)$ が成り立つときに, $\mathbb{C}$ 上で $f = g$ であるかどうかを述べよ. ただし, 一致の定理を用いて等号が成り立つことを示すときは, 一致の定理が適用できる条件を S がみたすことを確認し, 等号が成り立たないことを示すときは, 反例を与えよ.

(1) $S = \{2^n\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $S = \{n\pi i\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の微分方程式の解で, $u(0) = \dfrac{du}{dt}(0) = 0$ となるものを求めよ.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = e^t.$$