

2011 年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 II * ○ * ○ * ○ *

No. 6

2011 年 12 月 1 日実施

- [1] 整数 n と, 整数 m, m' について, $m \equiv m' \pmod{n}$ を以下のように定義する.

$$m \equiv m' \pmod{n} \stackrel{\text{def}}{\iff} m - m' \text{ は } n \text{ で割り切れる.}$$

- (1) $172a + 53b = 1$ をみたす整数 a, b を 1 組求めよ.
(2) $m \equiv 5 \pmod{172}$ かつ $m \equiv 2 \pmod{53}$ をみたす整数 m を 1 つ与えよ.

- [2] 4 次元多様体 $S^2 \times S^2$ と C^∞ 級写像 $f : S^2 \times S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を次で定義する.

$$S^2 \times S^2 = \{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^6; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$
$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3).$$

このとき, f の臨界点全体のなす集合は, 次の集合 C と一致することを示せ.

$$C = \{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \in S^2 \times S^2; (x_1, x_2, x_3) = \pm(y_1, y_2, y_3)\}.$$

- [3] $D \subset \mathbb{C}$ を領域, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ を正則函数とし, p を実数とする. このとき, 次を示せ.

$$\Delta(|f(z)|^p) = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2, \quad z \in \{w \in D; f(w) \neq 0\}.$$

ここで, Δ はラプラス作用素, 即ち, D 上の実数値函数 $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ に対して,
 $\Delta g(x + iy) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x + iy) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x + iy)$ ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位, $x + iy \in D$) とする. また, 正則函数 f の実部 $\operatorname{Re} f$, 虚部 $\operatorname{Im} f$ はいずれも C^2 級 (実は C^∞ 級) であることは証明なしで用いてよい.

- [4] 次の常微分方程式の一般解を, 実数値函数の範囲で求めよ.

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0.$$