2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習II ＊○＊○＊○＊

No. 5

2011年11月17日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ G を群とし, H, K を G の正規部分群で, $H \supset K$ が成り立っているものとする. このとき, 自然な単射準同型写像 $\iota : H/K \longrightarrow G/K$ が存在する (このことは証明しなくてよい). このとき, $\iota(H/K)$ は G/K の正規部分群となり, 群の同型写像 $(G/K)/\iota(H/K) \xrightarrow{\sim} G/H$ が存在することを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ と, $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を次で定める.

$$F(x,y,z,w) = (x^2 - y^2 + z^3 - 3zw^2 - 1,\ 2xy + 3z^2w - w^3 - 1),$$
$$M = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\,;\ F(x,y,z,w) = (0,0)\right\}.$$

すると, M は2次元多様体である (このことは No.4 $\boxed{2}$ で示されているので, 証明しなくてもよい).

(1) $p = (1,0,0,-1)$ における接空間 T_pM の基底を一組求めよ.

(2) $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $f(x,y,z,w) = (x-y, z-w)$ と定めるとき, $Df_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^2$ の階数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ を, 収束半径がそれぞれ ρ_1, ρ_2 $(0 < \rho_1, \rho_2 < +\infty)$ なる冪級数とする. このとき, 次の冪級数の収束半径 ρ と ρ_1, ρ_2 との関係を調べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p z^n$, ただし, p は正整数.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の微分方程式の解を求めよ。

$$(2x + y + 1)dx + (x - y - 1)dy = 0.$$