2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習II ＊○＊○＊○＊

No. 4

2011年10月27日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ $GL_n(\mathbb{Z}) := \{A\,;\,$整数係数の$\,n\,$次正方行列$, \det A = \pm 1\}$ は行列の積に関して群をなすことを示せ. また, $SL_n(\mathbb{Z}) := \{A \in GL_n(\mathbb{Z})\,;\, \det A = 1\}$ は $GL_n(\mathbb{Z})$ の正規部分群であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 4次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分集合 M を次で定める.

$$M = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4; x^2 - y^2 + z^3 - 3zw^2 = 2xy + 3z^2w - w^3 = 1\right\}.$$

このとき, M は2次元多様体 (正確には $\mathbb{R}^4$ の2次元部分多様体) であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $z_n > 0\,(n \geq 1)$ なる数列とする. このとき, 以下のことを示せ. ただし, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ はそれぞれ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の上極限, 下極限を表すとする.

(1) $\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} < 1$ ならば, 級数 $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束する.

(2) $\displaystyle \liminf_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} > 1$ ならば, 級数 $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散する.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$x'(t) = -\frac{2}{t}x(t) + \frac{1}{t^3}.$$