2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 II ＊○＊○＊○＊

No. 3

2011年10月20日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ は通常の加法に関して群となる. また, $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ と $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は通常の乗法に関して群となる. (ここまでの事実は証明なしで認めて良い.) このとき, 以下の写像は群の準同型写像となるか？理由も込めて答えよ.

(1) $f : \mathbb{C} \ni z \mapsto |z| \in \mathbb{R}$.

(2) $g : \mathbb{C}^\times \ni z \mapsto |z| \in \mathbb{R}^\times$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を $F(x,y) = (x^4 - y^4 + 1, 2xy)\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ で定める. また, 正の整数 n に対して, F の n 回反復合成 $F \circ F \circ \cdots \circ F$ を F^n で表わすものとする. (例えば, $F^3 = F \circ F \circ F$). また, C^1 級写像 $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ について, $DG_{(x,y)}$ を (x,y) における G のヤコビ行列とする.

(1) すべての整数 $n \geq 1$ に対して, $\det DF^n_{(1,0)} \neq 0$ であることを示せ.

(2) すべての整数 $n \geq 2$ に対して, $DF^n_{(0,1)} = O$ であることを示せ. ここで O は零行列を表わすものとする.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n\ \ (z_n \in \mathbb{C}\ \ (n = 1, 2, \ldots))$ を絶対収束する無限級数とする. このとき, この級数の項の順序をどのように変えても, 新たに得られる級数は絶対収束し, その和は元の級数の和と変わらないことを示せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の同次微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$