2011年度

＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習II ＊○＊○＊○＊

No. 2

2011年10月13日実施

1 $GL_n(\mathbb{R}) := \{A : 実数係数の\ n\ 次正方行列で\ \det A \neq 0\}$ は行列の積に関して群となる (これは証明なしで認めてよい). このとき, 以下の $GL_n(\mathbb{R})$ の部分集合が $GL_n(\mathbb{R})$ の部分群となるか, 理由を込めて答えよ.

(1) $H_1 = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,;\, A\ のすべての成分が有理数\}$.

(2) $H_2 = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\,;\, A\ のすべての成分が整数\}$.

2 $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,;\, u^2+v^2<1\}$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2+z^2=1\}$ とし, $U_1=\{(x,y,z)\in S^2\,;\, x>0\}$, $U_2=\{(x,y,z)\in S^2\,;\, y<0\}$, $U=U_1\cap U_2$ と置く. また, 写像 $\phi_1 : U_1 \longrightarrow D$, $\phi_2 : U_2 \longrightarrow D$ を $\phi_1(x,y,z)=(y,z)$, $\phi_2(x,y,z)=(x,z)$ で定める.

(1) ϕ_1, ϕ_2 は逆写像 $\phi_1^{-1} : D \longrightarrow U_1$, $\phi_2^{-1} : D \longrightarrow U_2$ を持つことを示せ.

(2) $\phi_2(U)$ は $\mathbb{R}^2$ の開部分集合であることを示せ.

(3) 函数 $f, g : \phi_2(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $(f(u,v), g(u,v)) = \phi_1\circ\phi_2^{-1}(u,v)$ で定める. このとき, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を求めよ.

3 $A \subset \mathbb{C}$ とする. このとき, A の閉包 $\overline{A}$ を次で定める.

$$\overline{A} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \forall r>0\ に対して\ D(z;r)\cap A \neq \emptyset\}.$$

このとき, 次を示せ. ただし, $U \subset \mathbb{C}$ が開集合であるとは, 任意の $z \in U$ について正実数 $r>0$ が存在して $D(z;r)\subset U$ であることとし, $B\subset\mathbb{C}$ が閉集合であるとは, B の補集合 $B^c \subset \mathbb{C}$ が開集合であることとする.

(1) A が閉集合である $\iff$ $A=\overline{A}$.

(2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(3) $\overline{A}$ は A を含む閉集合の中で最小のものである.

4 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$x'(t) = 1 - x(t)^2.$$