

2011年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 II * ○ * ○ * ○ *

No. 1

2011年10月6日実施

1 実2次直交行列 $O(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid {}^tAA = A^tA = E_2\}$ の連結成分の個数を求めよ. ただし, E_2 は2次単位行列とする.

2 次の複素正方行列 A, B の例を挙げよ.

- (1) 対角行列と相似ではない正方行列 A で, 固有多項式と最小多項式が異なる.
- (2) B の異なる固有値に属する固有ベクトルのペア v_1, v_2 で, 内積 $v_1 \cdot v_2 \neq 0$ となるものが存在する. ただし, 内積は標準内積とする.

3 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 上で定義された次のベクトル場 F を考える.

$$F = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2y - 2y^3 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2x^3 + 2xy^2 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

このとき, D 内の曲線 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16\}$ 上での線積分 $\int_C F \cdot dr$ を計算せよ. ただし, 曲線 C の向きは反時計回りとする.