

2010年度

* ○ * ○ * ○ * **数学基礎演習 I** * ○ * ○ * ○ *

復習テスト No. 3

2010年7月15日実施

- 1 実数全体のなす集合 \mathbb{R} を通常距離による距離空間と考える. \mathbb{R} の部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ について, \mathbb{R} における距離を X 上に制限することにより, X を距離空間と考える. このとき, 以下の部分集合 X について, X が完備であるかどうか理由をつけて述べよ.
- (1) $X = \mathbb{Z}$ (整数全体のなす部分集合).
(2) $X = \mathbb{Q}$ (有理数全体のなす部分集合).

- 2 以下の行列 A の Jordan 標準形を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3 以下の (A)(B) のうち 一方のみ 解答せよ.

(A) 向き付けられた曲面 S およびベクトル場 F を以下で与える.

$$S: x + y + z = 2, \quad x \leq 1, \quad y \leq 1, \quad z \leq 1,$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

このとき, 面積分 $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ を求めよ.

(B) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ で定義された次のベクトル場 F を考える.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

このとき, $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ を示せ. さらに, \mathbf{F} が $(0, 0)$ で定義されていないことを考慮して $\text{grad } f = \mathbf{F}$ となる C^2 級関数 $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ があるかどうか述べ, f が存在するならばそのような f を 1 つ求めよ.