

2010 年度

* ○ * ○ * ○ * **数学基礎演習 I** * ○ * ○ * ○ *

復習テスト No. 2

2010 年 6 月 10 日実施

- 1 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対して, $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次で定義する.

$$d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{2(x_1 - y_1)^2 + 3(x_2 - y_2)^2}.$$

- (1) d_1 は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ.
(2) d を $\mathbb{R}^2$ 上の通常の Euclid 距離とする. このとき, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ が d に関して開集合であることと d_1 に関して開集合であることが同値であることを示せ.

- 2 以下の行列が対角化可能かどうか, 理由をつけて答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3 以下の (A)(B) のうち 一方のみ 解答せよ.

(A) $C : x^2 + y^2 = 4$ とし, 次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について線積分 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ. ただし, 曲線 C の向きは反時計回りとする.

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} \\ \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

(B) a, b を $a < b$ なる 2 つの実数, $I = [a, b]$ とし, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を単調増加関数とする. いま, I に含まれる区間塊 $J \subset I$ に対して, $\Phi(J) := \int_J f(x)dx$ とする. このとき, ある実数 α が存在して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a < c \leq b$ なる実数 c が存在し, 区間塊 J が区間 $[a, c]$ に含まれるならば, $|\Phi(J) - \alpha|J| \leq \varepsilon|J|$ が成り立つことを示せ. ただし, $|J|$ は J の通常の Jordan 測度とする.