

2010年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 10

2010年7月1日実施

1 X を (T_2) 空間, $f : X \rightarrow X$ を連続写像とする. このとき, $F := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ は X の閉集合であることを示せ.

2 A を複素 n 次正方行列, E を n 次単位行列, O を n 次零行列とする.

(1) 正整数 k が存在して $A^k = E$ が成り立つならば, A は対角行列と共役, 即ち, 複素 n 次正則行列 P が存在して, PAP^{-1} が対角行列となることを示せ.

(2) 正整数 k が存在して $A^k = O$ が成り立ち, かつ $A \neq O$ であるならば, A は対角行列に共役でないことを示せ.

3 以下の (A)(B) のうち 一方のみ 解答せよ.

(A) ベクトル場 $\mathbf{F} = \frac{1}{r^3}(xi + yj + zk)$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) および次の向き付けられた曲面 S_1, S_2 について, 面積分 $\int_{S_i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ ($i = 1, 2$) を求めよ. ただし, a は正定数とし, \mathbf{n} は外向きとする.

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad S_2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

(B) $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ で定義された次のベクトル場 \mathbf{F} の回転 $\text{rot } \mathbf{F}$ を計算せよ.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

また, 原点を中心とする半径 r の円周を正の向きに一周する路を C とするとき, 積分 $\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ を計算せよ.