

2010年度

* ○ * ○ * ○ * **数学基礎演習 I** * ○ * ○ * ○ *

No. 8

2010年6月17日実施

- 1 $X = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ とする. $f : X \rightarrow X$ が同相写像のとき, $f(0) = 0$ を示せ. ただし, X の位相は \mathbb{R} の通常の位相の部分空間の位相とする.

- 2 (1) A, B を n 次正方行列とする. このとき, 次のことが成り立つことを示せ.

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B).$$

- (2) A, B が n 次実正方行列とするとき, 以下が成り立つことを示せ. ただし, i は虚数単位とする.

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2.$$

- 3 以下の (A)(B) のうち 一方のみ 解答せよ.

- (A) 次の曲面の面積を求めよ.

$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

- (B) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ において, 次の函数 f の勾配 (gradient) を計算せよ. ここで, s は実数とする.

$$f(x, y, z) = r^s, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

また, $\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を計算せよ.