2010年度

# ＊○＊○＊○＊ 数学基礎演習 I ＊○＊○＊○＊

## No. 5

2010年5月20日実施

$\boxed{\mathbf{1}}$ $X = \mathbb{R}^2$ の2点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ の間の2つの距離を以下のように与える.

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$
$$d'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

いま, $U$ を $X$ の部分集合とする. このとき, $U$ が $d$ に関して開集合であることと $d'$ に関して開集合であることが同値であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の行列がそれぞれ対角化可能かどうか, 理由をつけて答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の (A)(B) のうち **一方のみ解答せよ**.

(A) ベクトル場 $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$ と線分 $C$ : $\boldsymbol{r} = (1-t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ $(0 \leq t \leq 1)$ に対し, 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(B) $\Phi$ を (有界な) 区間塊 $I$ に対して複素数 $\Phi(I)$ を対応させる「集合函数」で加法的なもの, つまり $I \cap J = \emptyset$ ならば $\Phi(I \cup J) = \Phi(I) + \Phi(J)$ を満たすものとする. この $\Phi$ の点 $x$ における (強い意味での) 密度微分 $D\Phi(x)$ を, 次の意味の極限が存在するときにそれで定義する: 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $x$ を内点としてもつ区間塊 $I_0$ が存在し, 任意の区間塊 $I \subset I_0$ に対し以下が成り立つ.

$$\big|\Phi(I) - D\Phi(x)|I|\big| \leq \varepsilon|I|,$$

但し, $|I|$ は区間塊の Jordan 測度を表す. もし, $\Phi$ が各点で密度微分可能ならば, 「密度」$D\Phi$ は連続であることを示せ.