

2010年度

* ○ * ○ * ○ * 数学基礎演習 I * ○ * ○ * ○ *

No. 4

2010年5月6日実施

1 写像 $f : A \rightarrow B$ と B の部分集合 B' について $f(f^{-1}(B')) \subset B'$ を示せ. また, 等号 $f(f^{-1}(B')) = B'$ が成り立たない例を一つ与えよ.

2 N を $n \times n$ 実行列とする. いま, ある正の整数 m が存在し $N^m = O$ とする. このとき, $N^n = O$ を示せ. また, $N^n = O$ かつ $N^{n-1} \neq O$ なる実 $n \times n$ 行列の例を一つ与えよ.

3 以下の (A)(B) のうち 一方のみ 解答せよ.

(A) スカラー場 f およびベクトル場 F に対し, 次を証明せよ.

$$\operatorname{rot}(fF) = (\operatorname{grad} f) \times F + f \operatorname{rot} F.$$

(B) 区間 $I = [0, 1]$ に含まれる有理数の全体を A とする. このとき, A の Jordan 外測度 $|A|^*$ 及び Jordan 内測度 $|A|_*$ を求めよ. また, 区間 $I = [0, 1]$ に含まれる無理数の全体を B とするとき, 以下の二つの値を各々計算して, 真の不等号が成り立っていることを確認せよ.

$$|A|^* + |B|^*, \quad |A \cup B|^* + |A \cap B|^*.$$