2015年度　解析学演義 II　(担当 菊地)

$\boxed{1}$ (1) $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ を 2 重実数列, A を実数とし, 以下の性質が成り立つとする.

(i) 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 M, N が存在して, $m > M$, $n > N$ ならば $|a_{m,n} - A| < \varepsilon$ が成り立つ.

(ii) 任意の正整数 m について, 実数列 $\{a_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する.

(iii) 任意の正整数 n について, 実数列 $\{a_{m,n}\}_{m=1}^{\infty}$ が収束する.

いま, 任意の正整数 m, n について, $b_m = \lim_{n\to\infty} a_{m,n}$, $c_n = \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ と表すとする. このとき, 実数列 $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ はいずれも A に収束することを示せ.

(2) 2 重実数列 $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ を以下のものとする.

$$a_{m,n} = \frac{(m+n)\sin m \sin n}{mn}.$$

このとき, 小問 (1) の条件 (i) をみたす A は存在するが, 任意の正整数 m, n について, $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ は存在しないことを示せ.

$\boxed{2}$ 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 少なくとも一方が有界ならば, 以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \geq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n.$$

さらに, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ のうち少なくとも一方が収束するならば, 上の 2 つの不等式において, いずれも等号が成り立つことを示せ.

$\boxed{3}$ (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n$ が収束することを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} y^{-y} e^y dy$ が収束することを, 小問 (1) の級数を用いて示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ が収束することを, 小問 (2) の積分を用いて示せ.

$\boxed{4}$ $p > 0$ を正実数とする.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ が収束するか, 発散するか調べよ.

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n\log n)(\log(\log n))^p}$ が収束するか, 発散するか調べよ.

$\boxed{5}$ 以下の函数列について, 閉区間 $[0,1]$ 上一様収束するかどうか, それぞれ判定せよ.

(1) $\left\{\dfrac{1}{1+nx}\right\}_{n=1}^{\infty}$.　(2) $\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$.　(3) $\{nx(1-x)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\boxed{6}$ 函数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2x}{1+n^3x^2}-\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$ を考える.

(1) この函数項級数は, $0<\varepsilon<1$ なる任意の実数 ε について, 閉区間 $[\varepsilon,1]$ 上一様収束するが, 閉区間 $[0,1]$ 上一様収束しないことを示せ.

(2) この函数項級数は, 閉区間 $[0,1]$ 上項別積分できることを示せ.

(3) この函数項級数は, $x=0$ において項別微分できないことを示せ.

$\boxed{7}$ a,b を $a<b$ なる実数とする.

(1) 閉区間 $[a,b]$ 上の実数値函数 $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ が単調増加, あるいは単調減少ならば, $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能であることを示せ.

(2) 小問 (1) の f について, 閉区間 $[a,b]$ 上の函数 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt\ \ (x\in[a,b])$ が微分可能であるために f がみたす必要十分条件を求めよ. さらに, $F'(x)=f(x)$ がすべての $x\in[a,b]$ で成り立つために f がみたす必要十分条件を求めよ.

$\boxed{8}$ α を正実数とし, $\mathbb{R}$ 上の函数 $f_\alpha:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を以下で与える.

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x} & (x>0),\\ 0 & (x\le 0).\end{cases}$$

(1) $1<\alpha<2$ のとき, f_α は $\mathbb{R}$ 上微分可能だが, $a\le 0<b$ なる任意の実数 a,b について, f'_α は閉区間 $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能でないことを示せ.

(2) $\alpha=2$ のとき, f_α は C^1 級函数ではないが, $a<b$ なる任意の実数 a,b について, f'_α は閉区間 $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能であることを示せ.

◯ 定理: a,b を $a<b$ なる実数とし, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数とする. このとき, 多項式函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, $[a,b]$ 上 f に一様収束するものが存在する (**Weierstrass の多項式近似定理**).

$\boxed{9}$ r を非負整数, a,b を $a<b$ なる実数とし, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ を閉区間 $[a,b]$ 上の C^r 級函数とする. このとき, 任意の正実数 $\varepsilon>0$ について, 多項式函数 g が存在して, $\displaystyle\sup_{x\in[a,b]}\sum_{k=0}^{r}|f^{(k)}(x)-g^{(k)}(x)|<\varepsilon$ が成り立つことを示せ. ただし, $f^{(k)}$ は f の k 階導函数を表すとする.

$\boxed{10}$ $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ を, 閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続函数とする. いま, 任意の非負整数 n について, 以下が成り立つとする.

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0.$$

このとき, $f = 0$, 即ち, f は $[0,1]$ 上恒等的に 0 であることを示せ.

$\boxed{11}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を C^2 級函数とする. このとき, f および f'' が有界ならば, f' も有界であることを示せ.

$\boxed{12}$ m を正整数, a, b を $a < b$ なる実数とし, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を C^{m-1} 級函数で, $m-1$ 階導函数 $f^{(m-1)}$ は微分可能であるとする. このとき $1 \le k \le m$ なる任意の整数 k について, $a < \xi_k < b$ なる実数 ξ_k が存在して, 以下で与えられる $R_m(x)$ により, $f(b) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + R_m(x)$ と表されることを示せ.

$$R_m(x) = \frac{f^{(m)}(\xi_k)}{k(m-1)!}(b-\xi_k)^{m-k}(b-a)^k.$$

(この $R_m(x)$ を **Roche-Schlömilch の剰余項**と呼ぶ. 特に, $k = m$ のとき, $R_m(x)$ を **Lagrange の剰余項**, $k = 1$ のとき, $R_m(x)$ を **Cauchy の剰余項**と呼ぶ.)

$\boxed{13}$ a, b を $a < b$ なる実数とし, $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ を開区間 (a,b) 上の C^∞ 級函数とする. いま, 任意の正整数 n および $a < x < b$ なる任意の実数 x について, $f^{(n)}(x) > 0$ が成り立つとする. このとき, f は (a,b) 上実解析的であることを示せ.

$\boxed{14}$ a, b を $0 < a < b$ なる実数とする. このとき, $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^∞ 級函数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ で, 以下の性質をみたすものを 1 つ与えよ.

(i) 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ について, $0 \le f(x) \le 1$.

(ii) $|x| \le a$ なる実数 x について, $f(x) = 1$.

(iii) $|x| \ge b$ なる実数 x について, $f(x) = 0$.

$\boxed{15}$ $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級函数の族 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で, 以下の性質をみたすものを 1 つ与えよ.

(i) すべての $n \in \mathbb{Z}$ について, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $f_n(x) \ge 0$.

(ii) すべての $n \in \mathbb{Z}$ について, $|x-n| \ge 2$ ならば, $f_n(x) = 0$.

(iii) 任意の $x \in \mathbb{R}$ について, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x) = 1$ (級数の和が意味をもつことも確認せよ).

$\boxed{16}$ 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が与えられているとする. このとき, $\mathbb{R}$ 上の C^{∞} 級函数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ で, 任意の非負整数 n について $f^{(n)}(0) = a_n$ が成り立つものを構成したい.

(1) 任意の非負整数 n および正実数 $\varepsilon_n > 0$ に対して, C^{∞} 級函数 $h_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ で, 以下の性質をみたすものをとる.

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq \varepsilon_n/2), \\ 0 & (|x| \geq \varepsilon_n), \end{cases} \qquad 0 \leq h_n(x) \leq 1.$$

そして, $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定める.

$$g_n(x) = \int_0^x dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} h_n(t_1) dt_1.$$

このとき, 以下のことが成り立つことを示せ.

$$g_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k \neq n), \\ 1 & (k = n), \end{cases} \qquad |g_n^{(k)}(x)| \leq \frac{\varepsilon_n |x|^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n$ が求める函数となるように, 正実数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ をうまく選べ.

$\boxed{17}$ $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\,;\, x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 4,\ x_1 + x_2 + x_3 = 4\} \subset \mathbb{R}^3$ を考える.

(1) C が C^1 級曲線であることを示せ. 即ち, C 上の任意の点 $x = (x_1, x_2, x_3) \in C$ について, x のある近傍において, 変数 x_1, x_2, x_3 のうち 2 個が残りの 1 個の変数の C^1 級函数で表されることを示せ.

(2) C 上の函数 $x_1x_2x_3$ の最大値と最小値, およびそれらの値をとる C 上の点 $x = (x_1, x_2, x_3) \in C$ を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ.

○ 定義: gamma 函数 $\mathit{\Gamma}(x)\,(x > 0)$ を以下の広義積分で定義する.

$$\mathit{\Gamma}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

$\boxed{18}$ (1) 非負整数 n について, $\displaystyle\frac{d^n \mathit{\Gamma}}{dx^n}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\log t)^n e^{-t} dt\ \ (x > 0)$ を示せ.

(2) 函数 $x \mapsto \log \mathit{\Gamma}(x)$ は開区間 $(0, +\infty)$ 上凸であることを示せ.

(3) $x > 0$ のとき, 以下の等式を示せ (**Gauss の表示**).

$$\mathit{\Gamma}(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

$\boxed{19}$ (1) (X,d) で集合 X 上に距離 $d : X \times X \longrightarrow [0,+\infty)$ が与えられた距離空間を表すとする. このとき, (X,d) が可分ならば, 第 2 可算公理が成り立つことを示せ.

(2) 第 2 可算公理をみたさない距離空間 (X,d) の例を与えよ.

○ 記号: (X,d) を距離空間とする. このとき, X の任意の空でない部分集合 $A, B \subset X$ に対して, **直径** $d(A)$, **距離** $d(A,B)$ を以下で定義する.

$$d(A) = \sup\{d(x,y)\,;\, x,y \in A\}, \quad d(A,B) = \inf\{d(x,y)\,;\, x \in A,\, y \in B\}.$$

$\boxed{20}$ (X,d) を距離空間とし, 函数 $d_1 : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下のものとする.

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \quad (x,y \in X).$$

(1) d_1 は X 上の $d_1(X) \leq 1$ なる距離であることを示せ.

(2) 距離空間 (X,d_1) は位相空間として (X,d) と同相であることを示せ.

(3) X 上の距離 d, d_1 について, d_1 が完備であるためには, d が完備であることが必要十分であることを示せ.

$\boxed{21}$ $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を, すべての正整数 n について $d_n(X_n) \leq 1$ なる距離空間の列とし, $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ を直積空間とする. そして, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 1$ なる正実数列とし, $X \times X$ 上の函数 d を以下で定義する.

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n(x_n,y_n) \quad (x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in X).$$

(1) d は X 上の $d(X) \leq 1$ なる距離であることを示せ.

(2) X 上の距離 d から決まる X 上の位相は, それぞれの正整数 n について d_n から決まる X_n 上の位相たちから導かれる X 上の直積位相と一致することを示せ.

(3) X 上の距離 d が完備であるためには, すべての正整数 n について, X_n 上の距離 d_n が完備であることが必要十分であることを示せ.

$\boxed{22}$ Λ を非可算集合, $\{(X_\lambda,d_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について X_λ が 2 個以上の元をもつ距離空間の族とする. このとき, 直積集合 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ にどのような距離を与えても, その距離から決まる X 上の位相が, それぞれの $\lambda \in \Lambda$ に対して d_λ から決まる X_λ の位相たちから導かれる X 上の直積位相と一致しないことを示せ.

○ 定義: (X,d_X), (Y,d_Y) を距離空間とする. このとき, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が**一様連続**であるとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, $x, x' \in X$, かつ $d_X(x,x') < \delta$ ならば, $d_Y(f(x),f(x')) < \varepsilon$ となることである.

$\boxed{23}$ (X, d_X) を距離空間, (Y, d_Y) を完備距離空間, $X_0 \subset X$ を稠密な部分集合とし, $f_0 : X_0 \longrightarrow Y$ を一様連続写像とする．このとき, X 上の一様連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ で, f の X_0 上への制限 $f|_{X_0}$ が f_0 と一致するものがただ 1 つ存在することを示せ.

$\boxed{24}$ (X, d) を距離空間とする.

(1) $A \subset X$ を空でない閉部分集合とし, X 上の函数 $f_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f_A(x) = d(\{x\}, A)\,(x \in X)$ とする．このとき, 任意の $x, y \in X$ について, $|f_A(x) - f_A(y)| \leq d(x, y)$ が成り立つことを示せ (このことにより, f_A は一様連続である).

(2) $X_0 \subset X$ を空でなく, 稠密でない部分集合とする．このとき, X_0 上の任意の一様連続函数 $f_0 : X_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ について, X 上の連続函数 $f_1, f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ で, $f_1 \neq f_2$, かつ $f_1|_{X_0} = f_2|_{X_0} = f_0$ となるものが存在することを示せ.

◯ 記号: 位相空間 X について, $C(X)$, $C_b(X)$ でそれぞれ X 上の (複素数値) 連続函数, 有界な連続函数全体のなす函数空間を表すとする．また, X 上の函数 $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ について, f の**台** $\mathrm{supp} f$ とは, 以下で与えられる X の部分集合である.

$$\mathrm{supp} f = \{x \in X\,;\, f(x) \neq 0\}^{\mathrm{cl}}.$$

ただし, 位相空間 Y およびその部分集合 $A \subset Y$ について, $A^{\mathrm{cl}} \subset Y$ で A の閉包を表すことにする．そして, $C_c(X)$ で以下の函数空間を表すことにする.

$$C_c(X) = \{f \in C(X)\,;\, \mathrm{supp} f \text{ が compact}\} \subset C_b(X).$$

◯ 定義: X を局所 compact Hausdorff 空間する．このとき, X 上の函数 $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ が**無限遠で消失**するとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, X の compact 部分集合 $C \subset X$ が存在して, $x \in X \setminus C$ ならば $|f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことである．そして, $C_\infty(X)$ で, 無限遠で消失する X 上の (複素数値) 連続函数全体のなす函数空間を表すとする.

$\boxed{25}$ X を局所 compact Hausdorff 空間とする.

(1) 函数 $\|\cdot\|_\infty : C_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下で定義する.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \quad (f \in C_b(X)).$$

そして, $f, g \in C_b(X)$ に対して, $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ とする．このとき, d は $C_b(X)$ 上の完備な距離であることを示せ (この $\|\cdot\|_\infty$ を**上限 norm** と呼ぶ).

(2) $C_\infty(X)$ は $C_b(X)$ の部分 vector 空間, かつ閉部分集合であることを示せ.

(3) $C_\infty(X)$ は $C_c(X)$ の完備化であることを示せ.

○ 定義: X を集合, (Y,d) を距離空間とする. このとき, 写像列 $\{f_n : X \longrightarrow Y\}_{n=1}^{\infty}$ が写像 $f : X \longrightarrow Y$ に X 上**一様収束**するとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正整数 N が存在して, $n > N$ ならば $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つことである.

○ 定義: (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, Λ を空でない集合とし, $\{f_\lambda : X \longrightarrow Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X から Y への写像族とする. このとき, $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**同程度連続**であるとは, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \in \Lambda$ および $x, x' \in X$ について, $d_X(x, x') < \delta$ ならば, $d_Y(f_\lambda(x), f_\lambda(x')) < \varepsilon$ が成り立つことである.

$\boxed{26}$ (X, d_X), (Y, d_Y) を compact 距離空間とし, $\{f_n : X \longrightarrow Y\}_{n=1}^{\infty}$ を, 同程度連続な写像列とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列で, X 上一様収束するものが存在することを示せ (**Ascoli-Arzelà の定理**).

○ 定義: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を連続函数とする. 正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, $t \in \mathbb{R}$ が ε に属する**概周期**であるとは, 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ について, $|f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$ が成り立つことである. 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正実数 $T > 0$ が存在して, 任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ について, ε に属する概周期 $t \in [a, a+T]$ が存在するとき, f を $\mathbb{R}$ 上の**概周期函数**と呼ぶ.

$\boxed{27}$ (1) $\mathbb{R}$ 上の連続な周期函数は概周期函数であることを示せ.

(2) α を正の無理数とし, $\mathbb{R}$ 上の函数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(x) = e^{ix} + e^{i\alpha x}$ $(x \in \mathbb{R})$ とする. このとき, f は周期的ではない概周期函数であることを, 定義に従って示せ. ただし, $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ は虚数単位を表すとする.

○ 記号: 以下の 2 問において, 任意の実数 $\tau \in \mathbb{R}$ について, $f_\tau(x) = f(x+\tau)$ とする.

$\boxed{28}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を概周期函数とする.

(1) f は有界, かつ $\mathbb{R}$ 上一様連続な函数であることを示せ.

(2) 任意の実数列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 函数列 $\{f_{\tau_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束する部分列をもつことを示せ.

$\boxed{29}$ (1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を有界な連続函数とする. もし, 任意の実数列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\{f_{\tau_n}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上一様収束する部分列をもてば, f は概周期函数であることを示せ.

(2) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を概周期函数, $a, b \in \mathbb{C}$ を複素数とする. このとき, $af + bg$ も概周期函数であることを示せ.

(3) $\{f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ を概周期函数からなる函数列とする. もし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が函数 f に $\mathbb{R}$ 上一様収束するならば, f も概周期函数であることを示せ.

$\boxed{30}$ $R>0$ を正実数, $D=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<R\}\subset\mathbb{C}$ とし, $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ を D 上の正則函数とする. また, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を, 相異なる実数からなる数列で, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ なるものとし, かつ, 任意の非負整数 n について, $f(a_n)\in\mathbb{R}$ が成り立つとする.

(1) 任意の $z\in D$ について, $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ が成り立つことを示せ.

(2) さらに, $a_n>0\,(n\geq 0)$ であり, すべての非負整数 n について, $f(a_{2n})=f(a_{2n+1})$ が成り立つならば, f は定数函数であることを示せ.

$\boxed{31}$ $D\subset\mathbb{C}$ を領域とし, $f:D\longrightarrow\mathbb{C}$ を D 上の正則函数とする. いま, 任意の $a\in D$ に対して, 正整数 n が存在して, $f^{(n)}(a)=0$ が成り立つとする. このとき, f は多項式函数であることを示せ.

○ 記号: $\widehat{\mathbb{C}}$ で, $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付加して得られる **Riemann 球面**を表すとする. なお, $\infty\in\widehat{\mathbb{C}}$ には, 以下の基本近傍系 $\mathcal{B}(\infty)$ が与えられているとする.

$$\mathcal{B}(\infty)=\{O=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|>R\}\cup\{\infty\}\subset\widehat{\mathbb{C}}\,;\,R>0\}.$$

○ 定義: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を 2 次複素正則行列とする. このとき, $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の写像 $f_A:\widehat{\mathbb{C}}\longrightarrow\widehat{\mathbb{C}}$ を $f_A(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(z\in\widehat{\mathbb{C}})$ と定義する. ただし, $f_A\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$, $f_A(\infty)=\dfrac{a}{c}$ とする. この f_A を, A が定める **1 次分数変換**, あるいは **Möbius 変換**と呼ぶ.

$\boxed{32}$ (1) A を 2 次複素正則行列とし, $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とする. このとき, $f_A=f_{\alpha A}$ が成り立つことを示せ.

(2) A を 2 次複素正則行列とする. もし, $f_A(0)=0$, $f_A(1)=1$, $f_A(\infty)=\infty$ が成り立つならば, $A=\alpha I_2$ $(\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ が成り立つことを示せ. ただし, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は 2 次単位行列を表すとする.

(3) $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\widehat{\mathbb{C}}$ を相異なる $\widehat{\mathbb{C}}$ の元とする. このとき, $f_A(0)=\alpha$, $f_A(1)=\beta$, $f_A(\infty)=\gamma$ となる 2 次複素正則行列 A が存在することを示せ.

○ 記号: $\mathbb{C}$ 内の**単位円板**, **上半平面**をそれぞれ $\mathbb{D}$, $\mathcal{H}\subset\mathbb{C}$ と表すとする. 即ち,

$$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<1\},$$
$$\mathcal{H}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\,;\,y>0\}.$$

○ 定義: $D,\,D'\subset\mathbb{C}$ を領域とする. このとき, 写像 $f:D\longrightarrow D'$ が**正則同相**であるとは, f が全単射で, f, f^{-1} ともに正則函数であることである. 特に, $D=D'$ であるとき, f は D 上の**正則自己同相**であるという.

$\boxed{33}$ (1) $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ を単位円板 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};\,|z|<1\}$ 上の $f(0)=0$ なる正則自己同相写像とする．このとき, $|\alpha|=1$ なる複素数 $\alpha\in\mathbb{C}$ が存在して, $A=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$ とするとき, $f=f_A$ となることを示せ.

(2) 任意の $z_0\in\mathbb{D}$ に対して, $A_{z_0}=\begin{pmatrix}1 & -z_0\\ -\overline{z}_0 & 1\end{pmatrix}$ とする．このとき, $f_{A_{z_0}}$ は $f_{A_{z_0}}(z_0)=0$ なる $\mathbb{D}$ 上の正則自己同型写像であることを示せ.

(3) $\alpha,\,\beta\in\mathbb{C}$ を $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$ なる複素数とし, $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$ とする．このとき, $f_A|_{\mathbb{D}}$ は $\mathbb{D}$ 上の正則自己同相写像であることを示せ．さらに, $\mathbb{D}$ 上の正則自己同相写像 $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ に対して, $|\alpha|^2-|\beta|^2=1$ なる複素数 $\alpha,\,\beta$ が存在して, $\mathbb{D}$ 上 $f=f_A$ と表されることを示せ.

$\boxed{34}$ (1) $C=\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}$ とする．このとき, $f_C(\mathcal{H})=\mathbb{D}$ であることを示せ (この $\mathcal{H}$ から $\mathbb{D}$ への写像 $f_C|_{\mathcal{H}}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{D}$, あるいはその逆写像を **Cayley 変換**と呼ぶ).

(2) $a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R}$ を, $ad-bc=1$ なる実数とし, $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とする．このとき, $f_A|_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ 上の正則自己同相写像であることを示せ.

(3) $f:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ 上の正則自己同相写像とする．このとき, $ad-bc=1$ なる実数 $a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R}$ が存在して, $\mathcal{H}$ 上 $f=f_A$ となることを示せ.

$\boxed{35}$ 単位円板 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C};\,|z|<1\}\subset\mathbb{C}$ 内の区分的に C^1 級な曲線 $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{D}$ (ただし, $a,\,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) に対して, 以下の積分 $L(\gamma)$ を考える.

$$L(\gamma)=\int_a^b\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt.$$

さらに, $z_1,\,z_2\in\mathbb{D}$ に対して, $d(z_1,z_2)$ を以下で定める (**Poincare 計量**).

$$d(z_1,z_2)=\inf\{L(\gamma)\,;\,\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{D}\text{ は区分的に }C^1\text{ 級},\ \gamma(a)=z_1,\ \gamma(b)=z_2\}.$$

ただし, $z_1=z_2$ のとき, $d(z_1,z_2)=0$ とする.

(1) $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{C}$ を任意の $z\in\mathbb{D}$ について $f(z)\in\mathbb{D}$ が成り立つ正則函数とする．このとき, $L(f\circ\gamma)\le L(\gamma)$ となることを示せ．さらに, $f:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ が正則自己同相写像であるならば, $L(f\circ\gamma)=L(\gamma)$ となることを示せ.

(2) $r\in\mathbb{R}$ を $0\le r<1$ なる実数とする．このとき, $d(0,r)$ を求めよ.

(3) 任意の $z_1,\,z_2\in\mathbb{D}$ について, $d(z_1,z_2)$ を $z_1,\,z_2$ を用いて具体的に表せ.

○ 定義: f を $\mathbb{C}$ 上の有理型函数とする．このとき, 0 でない複素数 $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が f の**周期**であるとは, 任意の $z\in\mathbb{C}$ について, $f(z)=f(z+\omega)$ ($\infty=\infty$ も許す) が成り立つことである．周期をもつ有理型函数を周期函数と呼ぶことにする.

$\boxed{36}$ (1) f を $\mathbb{C}$ を周期函数とし, f の周期全体および 0 からなる集合を $\Omega \subset \mathbb{C}$ とする. このとき, Ω は $\mathbb{C}$ を加法群と考えたときの部分群であることを示せ.

(2) 周期函数 f が定数函数でなければ, 以下のいずれかが成り立つことを示せ.

(i) $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1$ となる $\omega_1 \in \mathbb{C}$ が存在する.

(ii) $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, かつ $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ が存在する.

○ 定義: 上の問題の小問 (2) の (ii) の条件をみたす有理型函数を**楕円函数**, または **2 重周期函数**と呼ぶ. そして, 加法群 $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ を f の**周期群**, $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C}$ を f の**基本周期**と呼ぶ. また, 任意の $a \in \mathbb{C}$ について, $\mathbb{C}$ の部分集合 $\{a + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \in \mathbb{C}; 0 \le t_1 < 1, 0 \le t_2 < 1\}$ を f の**周期平行四辺形**と呼ぶ. f の基本周期は, f により一意的には決まらず, 周期平行四辺形は基本周期に依存する. なお, 任意の複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ について, $\mathbb{C}$ 上常に値 α をとる定数函数 $f(z) = \alpha\,(z \in \mathbb{C})$ は, $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な任意の複素数 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ について, ω_1, ω_2 いずれも周期としてもつ函数と考えられる. よって, 定数函数もしばしば楕円函数と考える.

$\boxed{37}$ (1) $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な複素数 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ をともに周期としてもつ $\mathbb{C}$ 上の正則函数は定数函数であることを示せ.

(2) $\mathbb{C}$ 上の楕円函数 f の周期平行四辺形内の任意の留数の和は, 周期平行四辺形のとり方に依らず 0 であることを示せ. このことにより, 周期平行四辺形内に 1 位の極を 1 つもち, 他に極をもたない楕円函数は存在しないことを示せ.

○ 定義: f を $\mathbb{C}$ 上の楕円函数とする. このとき, f の周期平行四辺形内の極の位数を込めた個数を f の**次数**と呼ぶ.

$\boxed{38}$ n を正整数とし, f を $\mathbb{C}$ 上の n 位の楕円函数とする.

(1) 任意の $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ について, f の α 点, 即ち, $f(z) = \alpha$ となる z は f の任意の周期平行四辺形内に位数を込めて n 個存在することを示せ. ただし, f の α 点の位数とは, $\alpha \in \mathbb{C}$ ならば函数 $f - \alpha$ の零点の位数, $\alpha = \infty$ のときは f の極の位数のことである.

(2) f の周期群を $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ を f とし, $T \subset \mathbb{C}$ を f の周期平行四辺形とする. いま, $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, f の T 内の α 点全体と極全体をそれぞれ重複を込めて $\{a_j\}_{j=1}^n$, $\{b_j\}_{j=1}^n$ と表すとする. このとき, $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n b_j \in \Omega$ となることを示せ.

○ 記号: 以下の 2 問において, $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な複素数の組 $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C}$ および整数 $m, n \in \mathbb{Z}$ について, $\omega_{m,n} = m\omega_1 + n\omega_2 \in \mathbb{C}$ と表すとする.

$\boxed{39}$ $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な複素数の組とし, $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ とする.

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ を $\alpha > 2$ なる実数とする. このとき, 函数項級数 $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(z-\omega_{m,n})^\alpha}$ は $\mathbb{C} \setminus \Omega$ に含まれる任意の compact 集合上で一様収束することを示せ.

(2) $\mathbb{C}$ 上の函数項級数 $\displaystyle\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z-\omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\omega_{m,n}^2} \right)$ は Ω を周期群にもつ位数 2 の楕円函数となることを示せ (この $\wp$ を **Weierstrass の $\wp$ 函数**と呼ぶ).

$\boxed{40}$ $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上 1 次独立な複素数の組とし, $\wp$ を ω_1, ω_2 から得られる Weierstrass の $\wp$ 函数とする.

(1) $e_1 = \wp\left(\dfrac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$, $e_3 = \wp\left(\dfrac{\omega_2}{2}\right)$ とする. このとき, 任意の $z \in \mathbb{C}$ について, $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$ が成り立つ ($\infty = \infty$ も許す) ことを示せ.

(2) $\displaystyle g_2 = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{\omega_{m,n}^4}$, $\displaystyle g_3 = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{\omega_{m,n}^6}$ とする. このとき, 任意の $z \in \mathbb{C}$ について, $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{41}$ (1) gamma 函数 $\displaystyle\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-1}dt \ \ (z > 0)$ は $\mathbb{C} \setminus \{-n \in \mathbb{Z};\, n$ は非負整数$\}$ 上に一意的に解析接続されることを示せ. ただし, 複素数 $w \in \mathbb{C}$ について, $t^w = e^{w\log t}$ ($\log t \in \mathbb{R}$ は $(0, +\infty)$ 上の通常の対数) とする. そして, 任意の非負整数 n に対して, $-n$ が Γ の極であることを示し, それぞれの位数と留数を求めよ.

(2) 任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ について, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ ($\infty = \infty$ も許す) となることを示せ (**相補公式**).

$\boxed{42}$ (1) 任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ について, 以下が成り立つことを示せ (**Weierstrass の無限乗積表示**).

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

ただし, $\displaystyle\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \log n \right)$ (**Euler の定数**) とする. さらに, 右辺は $\mathbb{C}$ の任意の compact 部分集合上で一様収束することを示せ.

(2) 小問 (1) を用いて, 任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ について, 以下が成り立つことを示せ.

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

さらに, 右辺は $\mathbb{C}$ の任意の compact 部分集合上で一様収束することを示せ.

$\boxed{43}$ (1) 領域 $D = \{z \in \mathbb{C};\, \mathrm{Re} z > 1\}$ 上の函数項級数 $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ は D に含まれる任意の compact 部分集合上で一様収束することを示せ (この函数 ζ を **zeta 函数**と呼ぶ).

(2) $z \in D$ なる複素数 z について, $\zeta(z) = \displaystyle\prod_{p>0,\,\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}$ となることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{z \to 1+0} \zeta(z) = +\infty$ を示せ. また, これを用いて, $\displaystyle\sum_{p>0,\,\text{素数}} \frac{1}{p} = +\infty$ を示せ.

$\boxed{44}$ $\mathrm{Re} z > 1$ なる複素数 $z \in \mathbb{C}$ について, $\Gamma(z)\zeta(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$ を示せ.

$\boxed{45}$ r を $0 < r < 2\pi$ なる実数, $C_{r,+}$ を $+\infty$ から実軸正の部分に沿って r まで行く経路, $C_{r,-}$ を r から実軸正の部分に沿って $+\infty$ まで行く経路, $C_{r,c}$ を円周 $\{z \in \mathbb{C};\, |z| = r\}$ を r から正の向きに 1 回転する経路とし, C_r を $C_{r,+}$, $C_{r,c}$, $C_{r,-}$ の順につないだ経路とする. このとき, $\mathrm{Re} z > 1$ なる任意の複素数 z について, 以下が成り立つことを示せ.

$$\zeta(z) = -\frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw.$$

ただし, C_r 上 $(-w)^{z-1}$ は以下のように定義する.

$$(-w)^{z-1} = \begin{cases} e^{(z-1)(\log w - \pi i)} & (z \in C_{r,+}), \\ e^{(z-1)(\log r + i(\theta - \pi))} & (w = re^{i\theta} \in C_{r,c}, 0 < \theta < 2\pi), \\ e^{(z-1)(\log w + \pi i)} & (z \in C_{r,-}). \end{cases}$$

$\boxed{46}$ $0 < r < 2\pi$ とし, C_r は上問と同じものとする.

(1) 函数 $z \to \displaystyle\int_{C_r} \frac{(-w)^{z-1}}{e^w - 1} dw$ は $\mathbb{C}$ 上正則であることを示せ.

(2) zeta 函数 ζ は $z = 1$ のみに極をもつ有理型函数に解析接続されることを示し, $z = 1$ における主要部を求めよ.

(3) $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$, および任意の正整数 m について, $\zeta(-2m) = 0$ (**自明な零点**と呼ぶ), $\zeta(-2m+1) = -\dfrac{B_{2m}}{2m}$ となることを示せ. ただし, 非負整数 n について, B_n は $D = \{z \in \mathbb{C};\, 0 < |z| < 2\pi\}$ で定義される函数 $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ の $z = 0$ における Laurent 展開 (実は Taylor 展開) $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ により決まる複素数 (**Bernoulli 数**) とする.

$\boxed{47}$ (1) 函数項級数 $\dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$ は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に含まれる任意の compact 集合上で一様収束し, 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ について, その値が $\pi \cot \pi z$ となることを示せ.

(2) 有理型函数 $z \mapsto \pi \cot \pi z$ を $z = 0$ の近傍において Laurent 展開することにより, 任意の正整数 m について, $\zeta(2m) = \dfrac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m} B_{2m}}{2(2m)!}$ となることを示せ.

$\boxed{48}$ α を $0<\alpha<1$ なる実数とし, 閉区間 $[0,1]$ 上の函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が次の漸化式をみたすとする.

$$f_n(x)=\int_0^x |f_{n-1}(t)|^{\alpha}dt \quad (n\geq 1,\ x\in[0,1]). \tag{R_n}$$

いま, a を $0\leq a\leq 1$ なる実数とし, $[0,1]$ 上の函数 $f_0 : [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ を以下で定義する.

$$f_0(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x<a),\\ x-a & (a\leq x\leq 1).\end{cases}$$

このとき, 函数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $[0,1]$ 上一様収束することを示し, その極限函数を求めよ.

$\boxed{49}$ $n\geq 2$ なる整数 n について, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx}=|y|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{E_n}$$

(1) 微分方程式 (E_n) の $f_n(0)=1$, かつ $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ となる $\mathbb{R}$ 上の解 $y=f_n(x)$ を求めよ.

(2) 小問 (1) で得られる函数列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ が, $a<b$ なる任意の実数 a,b について, 閉区間 $[a,b]$ 上一様収束することを示し, その極限函数 f を求めよ.

$\boxed{50}$ $a,\ b\in\mathbb{R}$ を実数, $\delta,\ R>0$ を正実数, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,|x-a|\leq\delta,\ |y-b|\leq R\}$ とし, $F : D\longrightarrow\mathbb{R}$ を D 上の連続函数とする. いま, 次の微分方程式を考える.

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y). \tag{E}$$

さらに, $M=\max_{(x,y)\in D}|F(x,y)|$ とし, $\delta_1=\min\left\{\delta,\dfrac{R}{M}\right\}$ ($M=0$ のときは $\delta_1=\delta$) とする.

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $f_n(a)=b$ なる $[a-\delta_1,a+\delta_1]$ 上の微分方程式 (E) 上の解 $y=f_n(x)$ の列とする. このとき, $f_{\sup}(x)=\sup_{n\geq 1} f_n(x)$, $f_{\inf}(x)=\inf_{n\geq 1} f_n(x)$ とおくと, $y=f_{\sup}(x)$, $y=f_{\inf}(x)$ はいずれも $f_{\sup}(a)=f_{\inf}(a)=b$ なる $[a-\delta_1,a+\delta_1]$ 上の (E) の解となることを示せ.

(2) $[a-\delta_1,a+\delta_1]$ 上の $f_{\max}(a)=f_{\min}(a)=b$ なる微分方程式 (E) の解 $y=f_{\max}(x)$, $y=f_{\min}(x)$ で, $[a-\delta_1,a+\delta_1]$ 上の $f(a)=b$ なる (E) の任意の解 $y=f(x)$ について, $f_{\min}(x)\leq f(x)\leq f_{\max}(x)$ ($|x-a|\leq\delta_1$) が成り立つものが存在することを示せ.

$\boxed{51}$ 実数 $a,\ b\in\mathbb{R}$, 正実数 $\delta,\ R>0$ について, $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $D\subset\mathbb{R}^2$, D 上の連続函数 $F : D\longrightarrow\mathbb{R}$, 非負実数 $M\geq 0$, 正実数 $\delta_1>0$ および微分方程式 (E) を前問のものとし, $f_{\max}$, $f_{\min}$ を前問により与えられる $[a-\delta_1,a+\delta_1]$ 上の函数とする. いま, $(a',b')\in D$ を $f_{\min}(a')\leq b'\leq f_{\max}(a')$ なる点とする. このとき, $f(a)=b$, かつ $f(a')=b'$ となる $[a-\delta_1,a+\delta_1]$ 上の (E) の解 $y=f(x)$ が存在することを示せ.

$\boxed{52}$ $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ を複素数とし, D 上で次の微分方程式を考える.

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + (1 - \alpha - \beta) z \frac{dw}{dz} + \alpha\beta w = 0. \tag{P}$$

(1) f_α, $f_\beta : D \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f_\alpha(z) = z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $f_\beta(z) = z^\beta = e^{\beta \log z} (z \in D)$ とする. ただし, $z = re^{i\theta} \in D\,(r > 0,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2)$ について $\log z = \log r + i\theta$ とする. このとき, $w = f_\alpha(z)$, $w = f_\beta(z)$ はいずれも微分方程式 (P) の D 上の解であることを示せ. そして, $\alpha \neq \beta$ のとき, f_α, f_β は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立であることを示せ.

(2) $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{ai \in \mathbb{C}\,;\, a \leq 0\}$, $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{ai \in \mathbb{C}\,;\, a \geq 0\}$, $D_l = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, z < 0\}$ とする. そして, f_α, f_β を D_1 上に解析接続した函数をそれぞれ g_α, g_β とし, g_α, g_β の D_l 上への制限 $g_\alpha|_{D_l}$, $g_\beta|_{D_l}$ を D_2 上に解析接続した函数を D に制限したものをそれぞれ $f_\alpha^{(1)}$, $f_\beta^{(1)} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ とする. このとき, $f_\alpha^{(1)}$, $f_\beta^{(1)}$ を f_α, f_β の 1 次結合で表せ.

(3) $\alpha = \beta$ のとき, $f_{\alpha,1} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f_{\alpha,1}(z) = z^\alpha \log z\ \ (z \in D)$ とする. このとき, $w = f_{\alpha,1}(z)$ も微分方程式 (E) の D 上の解となり, f_α, $f_{\alpha,1}$ は $\mathbb{C}$ 上 1 次独立であることを示せ.

(4) $f_{\alpha,1}$ を D_1 上に解析接続した函数を $g_{\alpha,1}$ とし, $g_{\alpha,1}$ の D_l 上への制限 $g_{\alpha,1}|_{D_l}$ を D_2 に解析接続した函数を D 上に制限したものを $f_{\alpha,1}^{(1)} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ とする. このとき, $f_\alpha^{(1)}$, $f_{\alpha,1}^{(1)}$ を f_α, $f_{\alpha,1}$ の 1 次結合で表せ.

$\boxed{53}$ α, $\beta \in \mathbb{C}$ を複素数とし, γ を非正整数でない複素数とする. いま, 次の微分方程式を考える (**Gauss の超幾何微分方程式**).

$$z(1-z)\frac{d^2 w}{dz^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0. \tag{HGDE}$$

(1) 微分方程式 (HGDE) の $z = 0$ の十分小さい近傍における $f(0) = 1$ なる解 $w = f(z)$ は以下のように表されることを示せ (**Gauss の超幾何級数**). ただし, 複素数 $a \in \mathbb{C}$ および正整数 n について, $(a)_0 = 1$, $(a)_n = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(a + j)$ とする (**Pochhammer の記号**).

$$f(z) = F(\alpha, \beta; \gamma; z) = F_{2,1}(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n. \tag{HGS}$$

(2) 級数 (HGS) の収束半径を求めよ.

(3) z_0 を $0 < z_0 < 1$ なる実数, δ を非負整数でない複素数とし, $z = z_0$ の十分小さい近傍 U で定義される函数 $f_\delta : U \longrightarrow \mathbb{C}$ で, $f_\delta(z) = z^\delta \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ (z \in U \setminus \{z_0\},\ a_0 \neq 0)$ なる形のものを考える. もし, $w = f_\delta(z)$ が微分方程式 (HGDE) の解ならば, $\delta = 1 - \gamma$ となることを示せ. ただし, U 上では $z^\delta = e^{\delta \log z}$ を前問と同様に定義する.

(4) さらに, $\gamma \notin \mathbb{Z}$ ならば, $f_\delta(z) = a_0 z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; z)\ \ (z \in U)$ と表されることを示せ.

$\boxed{54}$ $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$ を $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, かつ $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha) > 0$ が成り立つ複素数とする.

(1) Gauss の超幾何級数 $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ は次のように表されることを示せ. ただし, Γ は gamma 函数とし, $\mathrm{Re}\,w > 0$ なる複素数 w について, $-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(\log w) < \dfrac{\pi}{2}$ とし, 複素数 $\delta \in \mathbb{C}$ について, $w^\delta = e^{\delta \log w}$ とする.

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-zt)^{-\beta}dt \quad (|z|<1).$$

(2) さらに, $\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha$ が正実数であり, かつ $\gamma-\alpha-\beta > 0$ が成り立つとき, 級数 $F(\alpha,\beta;\gamma;1)$ は収束し, 以下のように表されることを示せ.

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

$\boxed{55}$ 非負整数 n について, 次の微分方程式を考える (**Legendre の微分方程式**).

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0. \qquad (\mathrm{P}_n)$$

(1) $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| < 2\} \subset \mathbb{C}$ における $f_n(1) = 1$ なる微分方程式 (P_n) の解 $w = f_n(z)$ は $f_n(z) = F\left(-n, n+1; 1; \dfrac{1-z}{2}\right)$ と Gauss の超幾何級数で表されることを示せ. そして, f_n が n 次多項式函数であることを確認せよ (この f_n を (n 次)**Legendre 多項式**と呼ぶ).

(2) 多項式函数として, $f_n(z) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$ となることを示せ.

(3) 非負整数 $m,\ n$ について, $f_m,\ f_n$ を閉区間 $[-1,1]$ 上の函数と考えて, $m \neq n$ のとき, $\displaystyle\int_{-1}^1 f_m(x)f_n(x)dx = 0$ となることを示せ. また, $\displaystyle\int_{-1}^1 (f_n(x))^2 dx$ を計算せよ.

$\boxed{56}$ 非負整数 n について, 次の微分方程式を考える (**Chebyshev の微分方程式**).

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - z\frac{dw}{dz} + n^2 w = 0. \qquad (\mathrm{C}_n)$$

(1) $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| < 2\} \subset \mathbb{C}$ における $f_n(1) = 1$ なる微分方程式 (C_n) の解 $w = f_n(z)$ は $f_n(z) = F\left(-n, n; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1-z}{2}\right)$ と Gauss の超幾何級数で表されることを示せ. そして, f_n が n 次多項式函数であることを確認せよ (この f_n を (n 次)**Chebyshev 多項式**と呼ぶ).

(2) 非負整数 n について, $f_{n+2}(z) - 2zf_{n+1}(z) + f_n(z) = 0\ \ (z \in \mathbb{C})$ を示せ. そして, これを用いて, 任意の非負整数 n および実数 $\theta \in \mathbb{R}$ について, $f_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ となることを示せ.

(3) 非負整数 $m,\ n$ について, $f_m,\ f_n$ を閉区間 $[-1,1]$ 上の函数と考える. このとき, $m \neq n$ ならば, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f_m(x)f_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$ となることを示せ. また, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(f_n(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を計算せよ.

○ 定義: 集合 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ が X 上の **σ-集合体**であるとは, 以下の条件が成り立つことである.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{B}$.

(ii) $A \in \mathcal{B}$ ならば, $A^c = X \setminus A \in \mathcal{B}$.

(iii) $\mathcal{B}$ の元からなる列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

集合 X および X の部分集合族 $\mathcal{B}$ の組 $(X, \mathcal{B})$ を**可測空間**と呼ぶ. そして, 可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上に測度 μ が与えられたとき, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を**測度空間**と呼ぶ.

○ 記号: X を集合, $\mathcal{F}$ を X の部分集合の族とする. すると, $\mathcal{F}$ を含む最小の X 上の σ-集合体が存在する. この σ-集合体を **$\mathcal{F}$ で生成される σ-集合体**と呼び, $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ で表すことにする.

$\boxed{57}$ X, Y を集合とし, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする. そして, Y の任意の部分集合族 $\mathcal{F}$ について, X の部分集合族 $\{f^{-1}(C) \subset X \,;\, C \in \mathcal{F}\}$ を $f^{-1}(\mathcal{F})$ と表すとする.

(1) $\mathcal{A}$ を X 上の σ-集合体とする. このとき, Y の部分集合族 $\{B \subset Y \,;\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ は Y 上の σ-集合体であることを示せ (この σ-集合体を f に関する $\mathcal{A}$ の**順像**と呼ぶ). また, f が全射であり, かつ Y の部分集合族 $\{f(A) \subset Y \,;\, A \in \mathcal{A}\}$ が Y 上の σ-集合体とならない例を 1 つ与えよ.

(2) $\mathcal{B}$ を Y 上の σ-集合体とする. このとき, X 上の部分集合族 $f^{-1}(\mathcal{B})$ は X 上の σ-集合体であることを示せ (この σ-集合体を f に関する $\mathcal{B}$ の**逆像**と呼ぶ).

(3) Y の任意の部分集合族 $\mathcal{F}$ について, $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{F})) = \mathcal{B}(f^{-1}(\mathcal{F}))$ となることを示せ.

○ 定義: X を位相空間とし, $\mathcal{O}_X$ を X の開集合全体のなす部分集合族とする. このとき, X 上の σ-集合体 $\mathcal{B}(\mathcal{O}_X)$ を X 上の **Borel 集合族**と呼び, $\mathcal{B}(X)$ で表すことにする. そして, $\mathcal{B}(X)$ の元の X の **Borel 集合**と呼ぶ. 以下では, 特に断りのない限り, 位相空間 X を可測空間と考えるときは σ-集合体として $\mathcal{B}(X)$ をとるものとする.

○ 定義: $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ を可測空間とする. このとき, 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が**可測**であるとは, $f^{-1}(\mathcal{B}_Y) \subset \mathcal{B}_X$ となることである.

$\boxed{58}$ (1) 距離空間 (X, d) について, $\mathcal{B}(X)$ は X 上のすべての実数値連続函数が可測である最小の σ-集合体であることを示せ.

(2) 位相空間 X で, X 上のすべての実数値連続函数が可測である最小の σ-集合体が $\mathcal{B}(X)$ と一致しないものを 1 つ与えよ.

○ 定義: X を集合とし, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の部分集合の列とする. このとき, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**上極限** $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} A_n$, **下極限** $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} A_n$ を以下で定義する.

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,\right), \quad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right).$$

$\boxed{59}$ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{B}$ の元からなる X の部分集合の列とする.

(1) $\mu\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < +\infty$ のとき, $\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$ を示せ.

(3) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty$ であり, かつ $\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) < \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n) < +\infty$ となる測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ および X の部分集合の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の例を1つ与えよ.

$\boxed{60}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を $0 < \alpha < 1$ なる無理数とし, 右半開区間 $[0, 1)$ に次の関係を入れる.

$$x \sim y \iff y = x + k\alpha + l \text{ となる整数 } k, l \text{ が存在する.}$$

(1) 関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ.

(2) $S \subset [0, 1)$ をこの同値関係に関する完全代表系とする. このとき, S は Lebesgue 非可測集合であることを示せ.

○ 定義: $\mathbb{R}$ の次の部分集合 $C \subset \mathbb{R}$ を **Cantor 集合**と呼ぶ.

$$C = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n} \in \mathbb{R} \,;\, \text{すべての } n \text{ について } a_n \in \{0, 1\}\right\}.$$

C は $\mathbb{R}$ の閉部分集合である. また, C 上の函数 $f_0 : C \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f_0\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ とし, 閉区間 $[0, 1]$ 上の函数 $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \sup_{y \in C, y \leq x} f_0(y)$ とする. すると, f は単調増加連続函数である. この f を **Cantor 函数**と呼ぶ.

$\boxed{61}$ f を Cantor 函数とし, $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = \sup\{y \in [0, 1] \,;\, f(y) \leq x\}$ $(x \in [0, 1])$ とする. このとき, $[0, 1]$ の任意の Lebesgue 非可測集合 $S \subset [0, 1]$ について, $g(S) \subset [0, 1]$ は $[0, 1]$ の Lebesgue 可測集合であるが, Borel 集合ではないことを示せ.

○ 定義: 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が**完備**であるとは, $A \subset B$, かつ $\mu(B) = 0$ なる $B \in \mathcal{B}$ が存在する X の任意の部分集合 $A \subset X$ (この A を X の (μ に関する) **零集合**と呼ぶ) が $\mathcal{B}$ に属することである.

$\boxed{62}$ $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ を σ-有限な測度空間, $p_X : X \times Y \longrightarrow X$, $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ を射影とし, $X \times Y$ の部分集合族 $p_X^{-1}(\mathcal{B}_X) \cup p_Y^{-1}(\mathcal{B}_Y)$ で生成される σ-集合体 $\mathcal{B}(p_X^{-1}(\mathcal{B}_X) \cup p_Y^{-1}(\mathcal{B}_Y))$ を $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ と表すことにする.

(1) $\mu_{X\times Y}(B_X \times B_Y) = \mu_X(B_X)\mu_Y(B_Y)$ $(B_Y \in \mathcal{B}_X,\ B_Y \in \mathcal{B}_Y)$ をみたす $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ 上の測度 $\mu_{X\times Y}$ がただ1つ存在することを示せ. ただし, $\mu_X(B_X) = 0$ または $\mu_Y(B_Y) = 0$ のときは $\mu_X(B_X)\mu_Y(B_Y) = 0$ とする.

(2) 一般に, μ_X, μ_Y がいずれも $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ 上の完備測度であっても, $\mu_{X\times Y}$ が $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ 上の完備測度とはならないことを, 反例を与えることにより示せ.

○ 定義: 以下では, 特に断らない限り, $\mathbb{R}$ 上の函数や写像が**可測**, **可積分**であるとは, それぞれ Lebesgue 測度に関して可測, 可積分 であることとする. また, $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 f の Lebesgue 測度に関する積分を, 単に $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ と表すことにする.

$\boxed{63}$ $\mathcal{M}$ で $\mathbb{R}$ 上の可測集合全体, μ_1 で $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を表すとし, f を $\mathbb{R}$ 上の実数値可測函数で, $\mu_1(A) < +\infty$ なる任意の可測集合 $A \in \mathcal{M}$ について $\displaystyle\int_A |f(x)|dx < +\infty$ となるものとする. いま, 任意の $y \in \mathbb{R}$ および $\mu_1(A) < +\infty$ なる可測集合 $A \in \mathcal{M}$ について, $\displaystyle\int_A f(x+y)dx = \int_A f(x)dx$ が成り立つとする. このとき, 実数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して, μ_1 に関してほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ について, $f(x) = c$ となることを示せ.

○ 定義: $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする. $\mathcal{B}$ 上の函数 $\Phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ が X 上の実数値, または複素数値**加法的集合函数**であるとは, 次の性質 (SF) をみたすことである.

(SF) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, かつ $A_m \cap A_n = \emptyset\ (m \neq n)$ ならば, $\displaystyle\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$.

測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の加法的集合函数 Φ が μ に関して**絶対連続**であるとは, $\mu(A) = 0$ なるすべての $A \in \mathcal{B}$ について, $\Phi(A) = 0$ となることである.

$\boxed{64}$ 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の加法的集合函数 $\Phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ が μ に関して絶対連続であるためには, 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, $\mu(A) < \delta$ なる任意の $A \in \mathcal{B}$ について $|\Phi(A)| < \varepsilon$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

○ 定義: a, b を $a < b$ なる実数とする. このとき, 閉区間 $[a, b]$ 上の複素数値函数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ が**有界変動**であるとは, 正実数 $M > 0$ が存在して, $[a, b]$ の任意の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ について, 次が成り立つことである.

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M.$$

$\boxed{65}$ a, b を $a < b$ なる実数とし, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を有界変動函数とする. そして, $x \in [a, b]$ および閉区間 $[a, x]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$ に対して, $P_{f,\Delta}$, $N_{f,\Delta}$ を以下で定義する.

$$P_{f,\Delta}(x) = \sum_{f(x_i) > f(x_{i-1})} (f(x_i) - f(x_{i-1})), \quad N_{f,\Delta}(x) = -\sum_{f(x_i) < f(x_{i-1})} (f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

ただし, 項数が 0 のときは 0 とする. さらに, $V_{f,\Delta}(x) = P_{f,\Delta}(x) + N_{f,\Delta}(x)$ とする. これらを用いて, $[a, b]$ 上の函数 P_f, N_f, V_f を $P_f(x) = \sup_{\Delta} P_{f,\Delta}(x)$, $N_f(x) = \sup_{\Delta} N_{f,\Delta}(x)$, $V_f(x) = \sup_{\Delta} V_{f,\Delta}(x)$ ($x \in [a, b]$, 上限は $[a, x]$ のすべての分割に対する) と定義する. このとき, P_f, N_f, V_f はいずれも単調増加であり, $V_f = P_f + N_f$ となることを示せ.

$\boxed{66}$ a, b を $a < b$ なる実数, $([a, b), \mathcal{M}, \mu_1)$ を $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度空間の右半開区間 $[a, b)$ への制限とし, $\varPhi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b)$ 上の実数値加法的集合函数とする. そして, 閉区間 $[a, b]$ 上の函数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \varPhi([a, x))$ $(x \in (a, b])$, $f(a) = 0$ とする.

(1) f は $[a, b]$ 上の左連続な有界変動函数であることを示せ.

(2) さらに, $\varPhi$ が μ に関して絶対連続であるとき, f は以下の性質 (AC) をみたすことを示せ (この性質をもつとき, f は $[a, b]$ 上**絶対連続**であるという).

(AC) 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して, 正実数 $\delta > 0$ が存在して, $[a, b]$ の任意の分点の組 $\{x_j\}_{j=1}^n$, $\{y_j\}_{j=1}^n$ で $a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots \leq x_n < y_n \leq b$ なるものについて, $\displaystyle\sum_{j=1}^n (y_j - x_j) < \delta$ が成り立つならば, $\displaystyle\sum_{j=1}^n |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon$.

$\boxed{67}$ a, b を $a < b$ なる実数とし, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の左連続な有界変動函数とする. また, 閉区間 $[a, b]$ に含まれる Borel 集合全体のなす $[a, b]$ 上の σ-集合体を $\mathcal{B}$ で表すとする.

(1) 可測空間 $([a, b], \mathcal{B})$ 上の加法的集合函数 $\varPhi_f$ で, $\varPhi_f([a, x)) = f(x) - f(a)$ $(x \in (a, b])$, かつ $\varPhi_f(\{b\}) = 0$ をみたすものがただ 1 つ存在することを示せ.

(2) さらに, f が絶対連続ならば, $\varPhi_f$ は $[a, b]$ に含まれる Lebesgue 可測集合全体のなす σ-集合体 $\mathcal{M}$ に拡張されることを示せ.

$\boxed{68}$ a, b を $a < b$ なる実数とする. このとき, 閉区間 $[a, b]$ 上の有界変動函数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ は, Lebesgue 測度に関してほとんど至るところ微分可能であることを示せ.

$\boxed{69}$ a, b を $a < b$ なる実数とし, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の単調増加函数とする.

(1) f の導函数 f' は可積分であり, $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$ が成り立つことを示せ.

(2) 小問 (1) において等号が成立せず, かつ f が連続である例を 1 つ与えよ.

$\boxed{70}$ a, b を $a < b$ なる実数, $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の可積分函数とする.

(1) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt\,(x \in [a, b])$ とする. このとき, f は $[a, b]$ 上の絶対連続函数であることを示せ.

(2) Lebesgue 測度に関して $[a, b]$ 上ほとんど至るところ $f' = g$ であることを示せ.

○ 定義: a, b を $a < b$ なる実数, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の有界変動函数, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ を函数とし, $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ および Δ の代表点 $\{\xi_j\,;\, x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j\}_{j=1}^n$ について, $S(f, \Delta, \{\xi_j\}_{j=1}^n)$ を以下で定義する.

$$S(f, \Delta, \{\xi_j\}_{j=1}^n) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(F(x_j) - F(x_{j-1})).$$

$|\Delta| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_{j-1}|$ とし, 極限 $\lim\limits_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta, \{\xi_j\}_{j=1}^n)$ が代表点 $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ のとり方に依らずに存在するとき, f は F に関して **Riemann-Stieltjes 積分可能**であるといい, その極限を **Riemann-Stieltjes 積分**と呼び, $\displaystyle\int_a^b f(x)dF(x)$ と表す.

$\boxed{71}$ a, b を $a < b$ なる実数, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の有界変動函数とする.

(1) $[a, b]$ 上の連続函数は, F に関して Riemann-Stieltjes 積分可能であることを示せ.

(2) F が連続ならば, $[a, b]$ 上の有界変動函数は, F に関して Riemann-Stieltjes 積分可能であることを示せ.

(3) $[a, b]$ 上の連続な有界変動函数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ について, 次を示せ (**部分積分法**).

$$\int_a^b f(x)dF(x) = f(b)F(b) - f(a)F(a) - \int_a^b F(x)df(x).$$

$\boxed{72}$ a, b を $a < b$ なる実数とし, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の絶対連続函数とする.

(1) F は $[a, b]$ 上有界変動であることを示せ.

(2) $[a, b]$ 上の有界変動函数 $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ について, $\displaystyle\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx$ が成り立つことを示せ (**置換積分法**).

$\boxed{73}$ a, b を $a < b$ なる実数, $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b]$ 上の左連続な単調増加函数とし, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ を $[a, b]$ 上の連続函数とする. このとき, $\displaystyle\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)d\mathit{\Phi}_F(x)$ が成り立つことを示せ. ただし, $\mathit{\Phi}_F$ は $\boxed{67}$ (1) で得られる $[a, b]$ 上の測度とする.

$\boxed{74}$ $a > 0$ を正実数とし, $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ を左連続な有界変動函数とする. このとき, 以下を示せ. なお, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ は証明なしで用いてよい.

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin nx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to 0+0} f(x).$$

○ 記号: 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測函数 f に対して, 以下のものを定義する.

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{ただし } p > 0,$$
$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0\,;\, \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > \alpha\}) = 0\}.$$

μ に関してほとんどすべての $x \in X$ について $f(x) = g(x)$ であるならば, $\|f\|_p = \|g\|_p$ $(0 < p \leq \infty)$ である. 特に, μ に関してほとんどすべての $x \in X$ について $f(x) = 0$ であるならば, $\|f\|_p = 0$ となる. ここで, X 上の可測函数全体のなす vector 空間に, 次の関係を入れる.

$$f \sim g \iff \mu \text{ に関してほとんどすべての } x \text{ について } f(x) = g(x).$$

このとき, この関係は同値関係であり, f を元とする同値類を $[f]$ で表すとし, 以下の集合を考える.

$$L^p(X, d\mu) = \{[f]\,;\, f \text{ は } X \text{ 上可測}, \|f\| < +\infty\}.$$

$[f]$ が $L^p(X, d\mu)$ に属するということは, 代表元 f のとり方に依らない. この $L^p(X, d\mu)$ を X 上の μ に関する L^p **函数空間**, あるいは単に L^p **空間**と呼ぶ. なお, 混乱の恐れがないときは, $L^p(X, d\mu)$ を単に $L^p(X)$ と表し, X 上の L^p **函数空間**, あるいは単に L^p **空間**と呼ぶ. 以下では, $L^p(x, d\mu)$ の元 $[f]$ の代表元に依らない性質を扱うときは, しばしば $[f]$ と f を同一視する. $1 < p \leq \infty$ のとき, $L^p(X)$ は $\|\cdot\|_p$ を norm とする norm 空間である. $1 < p < \infty$ のとき, $\|\cdot\|_p$ を p **乗 norm**, $\|\cdot\|_\infty$ を**本質的上限 norm** と呼ぶ.

$\boxed{75}$ (1) norm 空間 $(V, \|\cdot\|)$ が Banach 空間であるためには, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ なる V の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ が V において収束することが必要十分であることを示せ.

(2) 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$, および $1 \leq p < \infty$ なる実数 p あるいは $p = \infty$ について, norm 空間 $L^p(X)$ は完備であることを示せ.

$\boxed{76}$ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間, p を $0 < p < 1$ なる実数とし, $f, g \in L^p(X)$ について, $d(f, g) = \|f - g\|_p^p$ とする. このとき, $(L^p(X), d)$ は完備距離空間であることを示せ.

○ 定義: 以下では, 特に断らない限り, vector 空間, および norm 空間の係数体は複素数体 $\mathbb{C}$ とする. また, vector 空間の部分 vector 空間, および norm 空間の閉部分 vector 空間をそれぞれ単に**部分空間**, **閉部分空間**と呼ぶことにする.

$\boxed{77}$ (1) 有限次元 vector 空間上のすべての norm は完備であることを示せ.

(2) $(V, \|\cdot\|)$ を norm 空間とし, $W \subset V$ を有限次元部分 vector 空間とする. このとき, W は閉部分空間であることを示せ.

$\boxed{78}$ $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ を norm 空間とし, $T : V \longrightarrow W$ を V から W への線型作用素とする. このとき, T が連続であるためには, T が有界, 即ち, 正実数 $C > 0$ が存在して, $\|Tv\|_W \leq C\|v\|_V \ \ (v \in V)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $B(V, W) = \{T : V \longrightarrow W\,;\text{有界線型}\}$ とし, $T \in B(V, W)$ に対して, 実数 $\|T\|$ を次で定義する.

$$\|T\| = \inf\{C > 0\,;\, \|Tv\|_W \leq C\|v\|_V \, (v \in V)\}.$$

このとき, $(B(V, W), \|\cdot\|)$ は norm 空間であることを示せ (この $\|\cdot\|$ を $B(V, W)$ 上の**作用素 norm** と呼ぶ).

(3) さらに, $(W, \|\cdot\|_W)$ が Banach 空間ならば, $(B(V, W), \|\cdot\|)$ も Banach 空間であることを示せ.

$\boxed{79}$ $(V, \|\cdot\|_V)$ を norm 空間とし, $W \subset V$ を閉部分空間とする, いま, 剰余 vector 空間 V/W の任意の元 $\overline{v} = v + W \ \ (v \in V)$ に対して, $\|\overline{v}\|_{V/W}$ を以下で定義する.

$$\|\overline{v}\|_{V/W} = \inf_{w \in W} \|v + w\|_V.$$

(1) $(V/W, \|\cdot\|_{V/W})$ は norm 空間であることを示せ.

(2) さらに, $(V, \|\cdot\|_V)$ が Banach 空間ならば, $(V/W, \|\cdot\|_{V/W})$ も Banach 空間であることを示せ.

$\boxed{80}$ (1) V を有限次元 norm 空間, W を norm 空間, $T : V \longrightarrow W$ を V から W への線型作用素とする. このとき, T は連続であることを示せ.

(2) 任意の無限次元 norm 空間 V について, V 上の連続でない線型汎函数 $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在することを示せ.

(3) norm 空間 V の余次元 1 の部分空間 $W \subset V$, 即ち, $\dim V/W = 1$ なる部分空間 W が閉部分空間であるためには, 0 でない連続線型汎函数 $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在して, W が f の核 $\mathrm{Ker} f$ と一致することが必要十分であることを示せ.

$\boxed{81}$ (1) V を norm 空間, $W_1 \subset V$ を閉部分空間, $W_2 \subset V$ を有限次元部分空間とする. このとき, 部分空間 $W_1 + W_2 \subset V$ は閉部分空間であることを示せ.

(2) norm 空間 V および閉部分空間 W_1, $W_2 \subset V$ で, 部分空間 $W_1 + W_2 \subset V$ が閉部分空間でない例を 1 つ与えよ.

○ 定義: norm 空間 V に対して, V 上の有界線型汎函数全体のなす vector 空間 $B(V,\mathbb{C})$ を V の**共役空間**と呼び, V^* と表すことにする. そして, $V^* = B(V,\mathbb{C})$ 上の作用素 norm を $\|\cdot\|_*$ と表すとし, 特に断りのない限り, V^* を $\|\cdot\|_*$ を norm とする Banach 空間と考える.

$\boxed{82}$ $(X,\mathcal{B},\mu)$ を σ-有限な測度空間とする.

(1) p を $1<p<\infty$ なる実数とし, $q = \dfrac{p}{p-1}$ とするとき, $L^p(X)^* = L^q(X)$ を示せ.

(2) $L^1(X)^* = L^\infty(X)$ となることを示せ.

$\boxed{83}$ V を norm 空間とし, , $W \subset V$ を閉部分空間とする.

(1) 写像 $\Phi : (V/W)^* \longrightarrow V^*$ を $\Phi(g)(v) = g(v+W)\,(g \in (V/W)^*,\ v \in V)$ とする. このとき, Φ は等長な有界線型作用素であることを示せ. さらに, Φ の像 $\mathrm{Im}\,\Phi \subset V^*$ は以下で与えられる部分空間 $W^\perp \subset V^*$ と一致することを示せ (この $W^\perp$ を W の V^* における**零化空間**と呼ぶ).

$$W^\perp = \{f \in V^*\,;\, f(w) = 0\,(w \in W)\}.$$

(2) 写像 $F : V^* \longrightarrow W^*$ を $F(f) = f|_W$ $(f \in V^*,\ f|_W$ は f の W への制限$)$ とする. このとき, F は全射有界線型作用素であり, $\|F\| = 1$ が成り立つことを示せ.

(3) 線型作用素 $\overline{F} : V^*/W^\perp \longrightarrow W^*$ で, $\overline{F}(f+W^\perp) = F(f)\,(f \in F)$ が成り立つものが存在することを示せ. さらに, $\overline{F}$ は等長同型であることを示せ.

○ 定義: X を局所 compact Hausdorff 空間とし, $\mathcal{O}_X$ を X の開集合全体のなす部分集合族とする. いま, $x_\infty \notin X$ なる点 x_∞ を用意する. そして, 和集合 $X_\infty = X \cup \{x_\infty\}$ の開集合族 $\mathcal{O}_{X_\infty}$ を以下のように定義する.

$$O \in \mathcal{O}_{X_\infty} \iff \begin{cases} O \in \mathcal{O}_X & (O \subset X), \\ X \setminus O \subset X \text{ が } X \text{ の compact 部分集合} & (O \not\subset X). \end{cases}$$

このとき, X_∞ は compact Hausdorff 空間であり, X_∞ の位相から導かれる X の位相は, X の元の位相と一致する. この X_∞ を X の**1 点 compact 化**と呼ぶ.

$\boxed{84}$ X を compact でない局所 compact Hausdorff 空間とする.

(1) $f \in C_\infty(X)$ に対して, $f(x_\infty) = 0$ として f を X_∞ 上の函数と考える. このとき, $C_\infty(X)$ は $C(X_\infty)$ の余次元 1 の閉部分空間であることを示せ.

(2) $\pi : C(X_\infty) \longrightarrow C(X_\infty)/C_\infty(X)$ を自然な射影, 即ち, $\pi(f) = f + C_\infty(X)$ $(f \in C(X_\infty))$ とし, $W = \{f \in C(X_\infty)\,;\,$ 定数函数 $\} \subset C(X_\infty)$ とする. このとき, π の W への制限 $\pi|_W : W \longrightarrow C(X_\infty)/C_\infty(X)$ は等長同型であることを示せ.

$\boxed{85}$ X を compact Hausdorff 空間とする.

(1) $Y = \{x_\infty\}$ を (ただ 1 つ存在する位相により) 位相空間と考える. このとき, $X_\infty = X \sqcup Y = X \sqcup \{x_\infty\}$ は X と Y の直和位相空間であり, 任意の $g \in C(X)$, $h \in C(Y)$ に対して, $f|_X = g$, かつ $f|_Y = h$ となる $f \in C(X_\infty)$ がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) $C(X)$, $C(Y)$, $C(X_\infty)$ 上の上限 norm をそれぞれ $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, $\|\cdot\|_{X_\infty}$ と表すとする. このとき, $\|f\|_{X_\infty} = \max\{\|\, f|_X \,\|_X, \|\, f|_Y \,\|_Y\}$ $(f \in C(X_\infty))$ となることを示せ.

$\boxed{86}$ V を Banach 空間とし, W_1, $W_2 \subset V$ を V の閉部分空間で, $W_1 \neq \{0\}$ であり, かつ V が W_1 と W_2 の代数的直和 $V = W_1 \oplus W_2$ であるとする. そして, 写像 $T : V \longrightarrow W_1$ を, $T(v) = w_1$ $(v \in V,\ v = w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2)$ とする.

(1) T は連続線型作用素であり, $\|T\| \geq 1$ となることを示せ.

(2) $\|T\| > 1$ となる V および W_1, $W_2 \subset V$ の例を 1 つ与えよ.

$\boxed{87}$ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を σ-有限な測度空間, f を X 上の可測函数, p を $1 < p < +\infty$ なる実数とし, $q = \dfrac{p}{p-1}$ とする. いま, 任意の $g \in L^p(X)$ について, fg は X 上の可積分函数であるとする. このとき, $f \in L^q(X)$ であることを示せ.

$\boxed{88}$ $V = \{v = (v_n)_{n=1}^\infty \,;\, x_n \in \mathbb{C}\,(1 \leq n < \infty)$, 有限個の n を除いて $v_n = 0\}$ とし, V 上の norm $\|\cdot\|$ を $\|v\| = \max\limits_{1 \leq n < \infty} |v_n|\,(v = (v_n)_{n=1}^\infty \in V)$ とする. そして, 任意の正整数 m について, $f_m \in V^*$ を $f_m(v) = \sum\limits_{n=1}^{m} v_n\,(v = (v_n)_{n=1}^\infty \in V)$ とする.

(1) すべての $v \in V$ について, 数列 $\{f_m(v)\}_{m=1}^\infty$ は収束することを示せ.

(2) $f_m \in V^*\,(1 \leq m < \infty)$ であり, $\sup\limits_{1 \leq m < \infty} \|f\|_* = +\infty$ となることを示せ.

(3) $\widetilde{V} = \left\{v = (v_n)_{n=1}^\infty \,;\, v_n \in \mathbb{C}\,(1 \leq n < \infty),\ \lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0\right\}$ とし, $\widetilde{V}$ 上の norm $\|\cdot\|$ を $\|v\| = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |v_n|$ $(v = (v_n)_{n=1}^\infty \in \widetilde{V})$ とする. このとき, $\widetilde{V}$ は V の完備化であり, 任意の正整数 m について, f_m は $\widetilde{V}$ 上の有界線型汎函数に一意的に拡張されることを示せ.

(4) $\widetilde{V}$ の元 $v = (v_n)_{n=1}^\infty \in \widetilde{V}$ で, 数列 $\{f_m(v)\}_{m=1}^\infty$ が有界とならないものを 1 つ与えよ.

$\boxed{89}$ $(U, \|\cdot\|_U)$, $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ を Banach 空間とし, $T : U \times V \longrightarrow W$ を双線型写像で, 以下の性質が成り立つとする.

(i) 任意の $v \in V$ について, 写像 $T_v : U \ni u \mapsto T(u, v) \in W$ は有界である.

(ii) 任意の $u \in U$ について, 写像 ${}_uT : V \ni v \mapsto T(u, v) \in W$ は有界である.

このとき, 正実数 $C > 0$ が存在して, 任意の $u \in U$, $v \in V$ について, $\|T(u, v)\|_W \leq C\|u\|_U\|v\|_V$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{90}$ $(V, \|\cdot\|)$ を norm 空間とする.

(1) 任意の $v \in V$ について, $\|v\| = \sup_{f \in V^*,\, \|f\|_* \leq 1} |f(v)|$ が成り立つことを示せ.

(2) V^* が可分ならば, V も可分であることを示せ.

◯ 定義: V を norm 空間とする. このとき, V 上の**弱位相**とは, V の任意の元 $v \in V$ について, $B(f_1, \ldots, f_r; \varepsilon) = \{u \in V\,;\, |f_j(u - v)| < \varepsilon\,(j = 1, \ldots, r)\}$ (r は正整数, $f_1, \ldots, f_r \in V^*$, $\varepsilon > 0$) なる形の V の部分集合全体を x の基本近傍系とする位相である. V の点列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $v \in V$ に**弱収束**するとは, 点列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が弱位相について v に収束することである.

$\boxed{91}$ $(V, \|\cdot\|)$ を norm 空間とし, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ を V の点列で, $v \in V$ に弱収束するものとする.

(1) $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であり, $\|v\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|v_n\|$ となることを示せ.

(2) 実数列 $\{\|v_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ が収束し, かつ $0 < \|v\| < \lim_{n\to\infty} \|v_n\|$ となる例を 1 つ与えよ.

◯ 定義: norm 空間 V について, V の共役空間 V^* の共役空間 $(V^*)^*$ を V^{**} と表すことにする. V の任意の元 $v \in V$ について, $Jv \in V^{**}$ を $(Jv)(f) = f(v)\,(f \in V^*)$ とする. すると, J は等長線型作用素である. J が全射であるとき, V は**反射的**であるという.

$\boxed{92}$ V を Banach 空間とする. このとき, V が反射的であるためには, V^* が反射的であることが必要十分であることを示せ.

◯ 定義: V を norm 空間とする. このとき, V^* 上の**汎弱位相**とは, V^* の任意の元 $f \in V^*$ について, $B(v_1, \ldots, v_r; \varepsilon) = \{g \in V^*\,;\, |g(v_j) - f(v_j)| < \varepsilon\,(j = 1, \ldots, r)\}$ (r は正整数, $v_1, \ldots v_r \in V^*$, $\varepsilon > 0$) なる形の V^* の部分集合全体を f の基本近傍系とする位相である. V^* の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f \in V^*$ に**汎弱収束**するとは, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が汎弱位相について f に収束することである.

$\boxed{93}$ V を norm 空間とし, $B_1^* = \{f \in V^*\,;\, \|f\|_* \leq 1\} \subset V^*$ とする.

(1) B_1^* は汎弱位相について compact であることを示せ (**Banach-Alaoglu の定理**).

(2) さらに, V が可分ならば, B_1^* 上の距離 d で, d から得られる B_1^* 上の位相が汎弱位相と一致するものが存在することを示せ.

$\boxed{94}$ V を反射的な Banach 空間とする. このとき, V の部分集合 $S \subset V$ が有界であるためには, S の元からなる任意の点列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, 弱収束する部分列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ をもつことが必要十分であることを示せ.

○ 定義: 以下では, 特に断らない限り, 内積空間は複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える. また, 内積空間 H 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は 第 1 成分について $\mathbb{C}$ 線型, 第 2 成分について $\mathbb{C}$ 反線型 とする. 即ち, $u, v, w \in H$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について, 次が成り立つ.

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle,$$
$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle + \overline{\beta} \langle u, w \rangle.$$

$\boxed{95}$ (1) $(V, \|\cdot\|)$ を norm 空間とする. いま, 任意の $v, w \in V$ について, 以下の等式が成り立つとする (**平行四辺形の法則**, あるいは**中線定理**).

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

このとき, 次で与えられる $V \times V$ 上の函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ は V 上の内積であり, 任意の $v \in V$ について $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ が成り立つことを示せ.

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|v + i^k w\|^2 \quad (v, w \in V).$$

(2) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする. いま, p を $p \geq 1$ なる実数または ∞ とする. このとき, $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ が Hilbert 空間であるためには, $p = 2$ または $\dim L^p(X) \leq 1$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

$\boxed{96}$ (1) $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を Hilbert 空間とし, $W \subset H$ を閉部分空間とする. そして, $W^\perp = \{v \in H\,;\, \langle v, w \rangle = 0\, (w \in W)\}$ を W の直交補空間とする. このとき, $H = W \oplus W^\perp$ となることを示せ.

(2) 内積空間 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ および V の閉部分空間 $W \subset V$ で, $V \neq W \oplus W^\perp$ となる例を 1 つ与えよ.

○ 定義: V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. いま, $\overline{V}$ を加法群として V と同じものとし, $\overline{V}$ における scalar 乗法を, $\alpha \cdot v = \overline{\alpha} v\, (\alpha \in \mathbb{C},\, v \in \overline{V} = V)$ とする. すると, $\overline{V}$ も $\mathbb{C}$ 上の vector 空間になる. この $\overline{V}$ を V の**複素共役 vector 空間**と呼ぶ.

$\boxed{97}$ (1) $(H, \langle, \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とする. いま, $v, w \in \overline{H}$ に対して, $\overline{\langle v, w \rangle} = \overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle$ とする. このとき, $(\overline{H}, \overline{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ は内積空間であることを示せ (この $(\overline{H}, \overline{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ を $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ の**複素共役内積空間**と呼ぶ).

(2) さらに, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ が Hilbert 空間であるとする. いま, 任意の $v \in H$ について, $f_v \in H^*$ を $f_v(w) = \langle w, v \rangle\, (w \in H)$ とする. このとき, 写像 $\overline{H} \ni v \mapsto f_v \in H^*$ は等長同型であることを示せ (**Riesz の補題**).

$\boxed{98}$ $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を Hilbert 空間とし, $\|\cdot\|$ を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ から得られる H 上の norm とする.

(1) H の正規直交基底 $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset H$ が少なくとも 1 つ存在することを示せ.

(2) 任意の $v \in H$ について, $\{\lambda \in \Lambda;\ \langle v, v_\lambda\rangle \neq 0\} \subset \Lambda$ は添字集合 Λ の高々可算な部分集合であり, $v = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle v, v_\lambda\rangle v_\lambda$ および $\|v\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle v, v_\lambda\rangle|^2$ が成り立つことを示せ.

(3) $\{w_\mu\}_{\mu\in M}$ を H の正規直交基底とする. このとき, 添字集合 M の濃度は, Λ の濃度と等しいことを示せ.

$\boxed{99}$ K を compact Hausdorff 空間とし, $C(K)_{\mathbb{R}}$ で K 上の実数値連続函数全体のなす実 Banach 空間を表すとする. いま, $C(K)_{\mathbb{R}}$ の閉部分空間 $V \subset C(K)_{\mathbb{R}}$ を, 以下の性質が成り立つものとする.

(i) 任意の $f, g \in V$, $fg \in V$.

(ii) 相異なる K の任意の 2 点 $x, y \in K$ について, $f(x) \neq f(y)$ なる $f \in V$ が存在する.

このとき, $V = C(K)_{\mathbb{R}}$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{100}$ (1) K を compact Hausdorff 空間とし, $V \subset C(K)$ を以下の性質をみたす ($\mathbb{C}$ 上の) 閉部分空間とする.

(i) 任意の $f, g \in V$ について, $fg \in V$.

(ii) $f \in V$ ならば, $\overline{f} \in V$.

(iii) 相異なる任意の $x, y \in K$ について, $f(x) \neq f(y)$ なる $f \in V$ が存在する.

このとき, $V = C(K)$ が成り立つことを示せ (この主張および前問の主張を **Stone-Weierstrass の定理**と呼ぶ).

(2) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ の単位円板とし, $K = \mathbb{D}^{\mathrm{cl}} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1\} \subset \mathbb{C}$ を $\mathbb{D}$ の閉包とする. いま, $H(K) \subset C(K)$ を次で与えられる $C(K)$ の部分空間とする.

$$H(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{C};\ \text{連続, 単位円板上で正則}\}.$$

このとき, $H(K)$ は $C(K)$ の閉部分空間であり, 小問 (1) の (i) および (iii) はみたすが, (ii) は成り立たないことを示せ.

$\boxed{101}$ n を正整数とし, $I = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ の n 個の直積とする. そして, 多重指数 $J = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ について, I 上の函数 $e_J : I \longrightarrow \mathbb{C}$ を $e_J(x) = e_J(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} e^{2\pi i j_k x_k} = e^{2\pi i j_1 x_1} \cdots e^{2\pi i j_n x_n}$ $(x = (x_1, \ldots, x_n) \in I)$ とする.

(1) $\{e_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ で生成される $C(I)$ の部分空間は, $C(I)$ において稠密であることを示せ.

(2) $\{e_J\}_{J\in\mathbb{Z}^n}$ は $L^2(I)$ の正規直交基底であることを示せ. ただし, I 上には Lebesgue 測度が与えられているとする.

$\boxed{102}$ $\{(H_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を内積空間の族とし, $H_0 = \oplus^{\mathrm{alg}}_{\alpha\in A} H_\alpha$ を $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の (vector 空間としての代数的な意味での) 直和空間とする．そして, $H_0\times H_0$ 上の函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : H_0\times H_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ を次で与えられるものとする.

$$\langle v, w\rangle = \sum_{\alpha\in A}\langle v_\alpha, w_\alpha\rangle_\alpha, \quad v = (v_\alpha)_{\alpha\in A}, w = (w_\alpha)_{\alpha\in A} \in H_0.$$

(1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は H_0 上の内積であることを示せ.

(2) さらに, すべての $\alpha\in A$ について, $(H_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha)$ は Hilbert 空間であるとする．このとき, H_0 を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で完備化して得られる Hilbert 空間 H は以下のようになることを示せ．ただし, $\|\cdot\|_\alpha$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ から得られる H_α 上の norm とする.

$$H = \left\{ v = (v_\alpha)_{\alpha\in A}\,;\ \text{高々可算個の}\ \alpha\in A\ \text{を除いて}\ v_\alpha = 0,\ \sum_{\alpha\in A}\|v_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty \right\}.$$

$\boxed{103}$ (1) $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(H', \langle\cdot,\cdot\rangle_{H'})$ をともに内積空間とし, $H\otimes^{\mathrm{alg}} H'$ を H と H' の ($\mathbb{C}$ 上の vector 空間としての代数的な意味での)tensor 積とする．このとき, $H\otimes^{\mathrm{alg}} H'$ 上に $\langle v\otimes v', w\otimes w'\rangle = \langle v, w\rangle_H\langle v', w'\rangle_{H'}$ (v, $w\in H$, v', $w'\in H'$) なる内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) さらに, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$, $(H', \langle\cdot,\cdot\rangle_{H'})$ がともに Hilbert 空間であるとする．このとき, H, H' のうち少なくとも一方が有限次元ならば, $(H\otimes^{\mathrm{alg}} H', \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は完備であり, H, H' ともに無限次元ならば, $(H\otimes^{\mathrm{alg}} H', \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は完備ではないことを示せ.

○ 定義: 上問において, $H\otimes^{\mathrm{alg}} H'$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で完備化して得られる Hilbert 空間を H と H' の (Hilbert 空間としての)**tensor 積**と呼び, $H\otimes H'$ と表すことにする.

$\boxed{104}$ (1) H, H' を Hilbert 空間とし, $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset H$, $\{v'_\mu\}_{\mu\in M}\subset H'$ をそれぞれ H, H' の正規直交基底とする．このとき, $\{v_\lambda\otimes v'_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ は $H\otimes H'$ の正規直交基底であることを示せ.

(2) $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ をともに σ-有限な測度空間とし, $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset L^2(X, d\mu_X)$, $\{g_\mu\}_{\mu\in M}\subset L^2(Y, d\mu_Y)$ をそれぞれ $L^2(X, d\mu_X)$, $L^2(Y, d\mu_Y)$ の正規直交基底であるとする．また, $f\in L^2(X, d\mu_X)$, $g\in L^2(Y, d\mu_Y)$ について, f と g の tensor 積 $f\otimes g\in L^2(X, d\mu_X)\otimes L^2(Y, d\mu_Y)$ を $(f\otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ ($x\in X$, $y\in Y$) として $X\times Y$ 上の函数と考える．このとき, $L^2(X\times Y, d\mu_{X\times Y})$ は $L^2(X, d\mu_X)\otimes L^2(Y, d\mu_Y)$ と同一視され, $\{f_\lambda\otimes g_\mu\}_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}$ は $L^2(X\times Y, d\mu_{X\times Y})$ の正規直交基底であることを示せ.

○ 定義: V, W を Banach 空間とする．このとき, 線型写像 $T : V \longrightarrow W$ が **compact**, あるいは**完全連続**であるとは, V の任意の有界部分集合 $S\subset V$ について, S の T による像 $T(S)\subset W$ の閉包 $T(S)^{\mathrm{cl}}\subset W$ が W の compact 部分集合となることである.

$\boxed{105}$ V, W を Banach 空間とする.

(1) T_1, $T_2 : V \longrightarrow W$ をともに compact 作用素とし, $a, b \in \mathbb{C}$ とする. このとき, $aT_1 + bT_2 : V \longrightarrow W$ も compact 作用素であることを示せ.

(2) $T : V \longrightarrow W$ を compact 作用素とし, $U_1 \in B(V,V)$, $U_2 \in B(W,W)$ とする. このとき, TU_1, $U_2T : V \longrightarrow W$ はいずれも compact 作用素であることを示せ.

(3) $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(V,W)$ を, compact 作用素からなり, 作用素 norm について $T \in B(V,W)$ に収束する列とする. このとき, T も compact 作用素であることを示せ.

$\boxed{106}$ V, W を Banach 空間とし, $T : V \longrightarrow W$ を線型作用素とする.

(1) T が compact であるとする. このとき, V の点列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $v \in V$ に弱収束するならば, W の点列 $\{Tv_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $Tv \in W$ に (norm に関して) 収束することを示せ.

(2) V は反射的であるとし, 任意の $v \in V$ および v に弱収束する V の任意の点列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, W の点列 $\{Tv_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $Tv \in W$ に (norm の意味で) 収束するとする. このとき, T は compact 作用素であることを示せ.

○ 定義: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(H', \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'})$ を Hilbert 空間, $\| \cdot \|_{H'}$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'}$ から得られる H' 上の norm, $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を H の正規直交基底とし, $T : H \longrightarrow H'$ を $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} \|Tv_\lambda\|_{H'}^2 < +\infty$ なる有界線型作用素とする. このとき, T を **Hilbert-Schmidt 作用素**と呼び, $\|T\|_2 \geq 0$ を $\displaystyle\|T\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|Tv_\lambda\|_{H'}^2$ なる非負実数とする. そして, $B_2(H, H')$ で H から H' への Hilbert-Schmidt 作用素全体のなす集合を表すことにする.

$\boxed{107}$ H, H' を Hilbert 空間とし, $T : H \longrightarrow H'$ を Hilbert-Schmidt 作用素とする.

(1) $\displaystyle\|T\|_2^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|Tv_\lambda\|_{H'}^2$ は H の正規直交基底 $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のとり方に依らないことを示せ. ただし, $\| \cdot \|_{H'}$ は H' 上の内積から得られる norm とする.

(2) T は compact 作用素であることを示せ.

$\boxed{108}$ $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$, $(H', \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'})$ を Hilbert 空間とする.

(1) $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset H$ を H の正規直交基底とし, $B_2(H, H') \times B_2(H, H')$ 上の函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 : B_2(H, H') \times B_2(H, H') \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\displaystyle\langle S, T \rangle_2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle Sv_\lambda, Tv_\lambda \rangle_{H'}$ $(S, T \in B_2(H, H'))$ とする. このとき, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ は H の正規直交基底のとり方に依らず, $\|T\|_2 = \langle T, T \rangle_2^{\frac{1}{2}}$ $(T \in B_2(H, H'))$ が成り立ち, かつ $(B_2(H, H'), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ は Hilbert 空間であることを示せ.

(2) $\Phi : H' \otimes \overline{H} \longrightarrow B_2(H, H')$ を $\Phi(v' \otimes v)w = \langle w, v \rangle_H v'$ $(v' \in H',\ v \in \overline{H},\ w \in H)$ なる連続線型写像とする. このとき, Φ は等長同型であることを示せ.

$\boxed{109}$ $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ を σ-有限な測度空間, $F \in L^2(X \times Y, d\mu_{X\times Y})$ とし, 線型写像 $\varPhi_F : L^2(Y, d\mu_Y) \longrightarrow L^2(X, d\mu_X)$ を以下で定義する.

$$\varPhi_F f(x) = \int_Y F(x,y)f(y)d\mu_Y(y), \quad (f \in L^2(Y, d\mu_Y),\ x \in X).$$

このとき, $\varPhi_F$ は Hilbert-Schmidt 作用素であり, $\|\varPhi_F\|_2 = \|F\|_2$ となることを示せ.

$\boxed{110}$ $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $x \in \mathbb{R}$ について, $(f * g)(x)$ を以下のものとする.

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

(1) Lebesgue 測度に関してほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ について, 上の積分は収束することを示せ. そして, $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ であり, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ が成り立つことを示せ (この $f * g$ を f と g の**合成積**, あるいは**畳み込み**と呼ぶ).

(2) f, g, $h \in L^1(\mathbb{R})$ について, $f * g = g * f$, および $(f * g) * h = f * (g * h)$ が成り立つことを示せ.

(3) $f \in L^1(\mathbb{R})$ について, $f^* \in L^1(\mathbb{R})$ を $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ $(x \in \mathbb{R})$ とする. このとき, f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ について, $(f * g)^* = g^* * f^*$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{111}$ p を $p > 1$ なる実数とし, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ とする. このとき, Lebesgue 測度に関してほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ について, 積分 $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ は収束することを示せ. さらに, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ であり, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$ となることを示せ.

○ 定義: $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して, $\widehat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を以下で定義する.

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx \quad (\xi \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{112}$ (1) f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ とする. このとき, $(f * g)\widehat{\ } = \widehat{f}\,\widehat{g}$ および $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}}$ を示せ.

(2) 任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ について, $\widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R})$ を示せ (**Riemann-Lebesgue の定理**).

(3) Stone-Weierstrass の定理を用いて, $\{\widehat{f} \in C_\infty(\mathbb{R})\,;\, f \in L^1(\mathbb{R})\} \subset C_\infty(\mathbb{R})$ が $C_\infty(\mathbb{R})$ において稠密であることを示せ.

$\boxed{113}$ α を $\operatorname{Im}\alpha > 0$ なる複素数とし, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(x) = \dfrac{1}{|x-\alpha|^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ とする.

(1) R を $R > 2|\alpha|$ なる実数, $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$ とし, $\varGamma$ を D の境界とする. このとき, 負実数 $\xi < 0$ について, $\mathbb{C}$ 上の有理型函数 $z \mapsto \dfrac{e^{-2\pi i\xi z}}{(z-\beta)^2+\gamma^2}$ $(\alpha = \beta + \gamma i,\ \beta \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$ を $\varGamma$ 上正の向きに積分し, R を正の無限大に発散させることにより, $\widehat{f}(\xi)$ を求めよ.

(2) $\widehat{f}$ を求めよ.