2010年度　解析学演義 I　(担当 菊地, 澤野)

◯ ($\star$) が付いている問題はやや難しい問題である.

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ について, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ (A, B ともに有限値) ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = AB$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{2}$ (1)　2 重数列 $\{a_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ について $\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n} = A$ (有限値) が存在し, かつすべての $m, n = 1, 2, \ldots$ に対して $b_m := \lim_{n\to\infty} a_{m,n}$, $c_n := \lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ が存在すれば $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ はともに A に収束することを示せ.
(2)　$\displaystyle a_{m,n} := \frac{(m+n)\sin m\ \sin n}{mn}$ とすると $\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n}$ は存在するが, どの正整数 m, n に対しても $\lim_{n\to\infty} a_{m,n}$, $\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ は存在しないことを示せ.

$\boxed{3}$ 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 少なくとも一方が有界のとき以下の不等式を示せ.

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n, \quad \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n$$

また, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のうち少なくとも一方が収束すれば, 上の不等式において等号が成り立つ ($\pm\infty = \pm\infty$ もありうる) ことを示せ.

$\boxed{4}$ ($\star$)　$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし, かつ $a_{m+n} \le a_m + a_n$ を満たしているとする. このとき, 数列 $\displaystyle\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ はある実数に収束するか負の無限大に発散し, いずれの場合でも $\displaystyle\inf_{n\ge 1}\frac{a_n}{n}$ と一致することを示せ.

$\boxed{5}$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を正数列で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ なるものとする. このとき,

(1)　$\displaystyle S_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ の収束・発散を調べよ.

(2)　$\displaystyle S_2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$ の収束・発散を調べよ.

$\boxed{6}$ 級数 $\displaystyle f(x) := \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2 x}{1 + n^3 x^2} - \frac{(n+1)^2 x}{1 + (n+1)^3 x^2}\right\}$ は閉区間 $[0, 1]$ で一様収束ではないが項別に積分できることを示せ. また $x = 0$ で項別に微分できるかどうかも調べよ.

$\boxed{7}$ (1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ および正整数 N について, $S_n^{(N)} := \sum_{k=N}^{n} a_k \, (n \geq N)$ とするとき以下の等式を示せ (Abel の変形).

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{m-1} S_k^{(N)}(b_k - b_{k+1}) - S_n^{(N)} b_{n+1} + S_m^{(N)} b_m, \quad (m > n \geq N).$$

(2) $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ なる数列, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $f_n(x) := e^{2\pi i n x}$ なる連続函数列とする. このとき $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$ は $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ なる任意の ε について $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ 上で一様収束することを示せ.

$\boxed{8}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ を, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するものとする. このとき, 開区間 $(-1,1)$ 上の冪級数 $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は定義により $x = 1$ でも収束するが, その収束は閉区間 $[0,1]$ 上一様であることを示せ. 特に, f を左半開区間 $(-1,1]$ 上の函数と考えるとき連続であることを示せ (Abel の定理).

$\boxed{9}$ 数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ に対して, 数列 $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ を $c_n := a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n$ で定義する. さらに, 級数 $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに収束するとする.

(1) 級数 $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束すれば, 級数 $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も絶対収束し, $AB = C$ となることを示せ.

(2) $(\star)$ $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も (絶対収束とは限らないが) 収束すれば, $AB = C$ となることを示せ.

(3) $(\star)$ $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束すれば, $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ も収束することを示せ.

$\boxed{10}$ $(\star)$ $[a,b] \subset \mathbb{R}$ を有界閉区間とし, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $[a,b]$ 上の単調増加函数からなる函数列で, 一様に有界, 即ちある正実数 $M > 0$ が存在して, $|f_n(x)| \leq M$ (n は正整数, $x \in [a,b]$) が成り立つとする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列で, $[a,b]$ 上各点収束するものが存在することを示せ (Helly の選出定理).

$\boxed{11}$ 有界閉区間 $[a,b]$ $(a < b)$ 上の実数値函数 $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ が単調増加, あるいは単調減少であるとする. このとき, $[a,b]$ 上の函数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ が x の函数として $[a,b]$ 上微分可能であるための f の必要十分条件を求めよ. また, このとき $F'(x) = f(x)$ がすべての $x \in [a,b]$ で成り立つかどうか述べよ.

$\boxed{12}$ α を正数とし, $\mathbb{R}$ 上の函数 f_α を次で定義する.

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) $1 < \alpha < 2$ のとき f_α は $\mathbb{R}$ 上微分可能だが, f_α' は閉区間 $[a,b]\,(a \leq 0 < b)$ 上では Riemann 積分不可能であることを示せ.

(2) $\alpha = 2$ のとき f_α は C^1 級ではないが, 任意の有界閉区間 $[a,b]\,(a < b)$ 上で f_α' は有界であり, かつ Riemann 積分可能であることを示せ.

$\boxed{13}$ $\mathbb{R}$ 上の C^2 級函数 f に対して, f, f'' が有界ならば f' も有界であることを示せ.

$\boxed{14}$ (1) $0 \leq \alpha \leq 2$ のとき, $g_\alpha(t) = \dfrac{t^\alpha}{1+t^2}$ は $t \geq 0$ で有界な函数であることを示せ.

(2) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(1+nx^2)}$ は $x > 0$ で連続な函数であり, $0 < \alpha \leq 2$ なる任意の α に対して正実数 $C_\alpha > 0$ が存在して, $|f(x)| \leq C_\alpha x^{-\alpha}\,(x > 0)$ が成り立つことを示せ.

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ が存在して, $I = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^\infty n^{-3/2}$ であることを示せ.

$\boxed{15}$ (1) 閉区間 $[1,\infty)$ 上連続な函数 f が広義 Riemann 積分可能であるとする. このとき, 任意の正実数 $a > 0$ について, 函数 $x \mapsto e^{-ax}f(x)$ が $[1,\infty)$ 上広義 Riemann 積分可能であることを示し, さらに, 次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{a\to 0+0}\int_1^\infty e^{-ax}f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx, \quad \lim_{a\to\infty}\int_1^\infty e^{-ax}f(x)dx = 0.$$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ を求めよ.

$\boxed{16}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=0}^n (k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$ を示せ.

(2) ($\star$) 閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続函数 f に対して, 多項式 $B_n(x;f)\,(n=1,2,\ldots)$ を次で定義する:

$$B_n(x;f) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$

$B_n(x;f)$ を x についての $[0,1]$ 上の函数と考える. このとき $\{B_n(\cdot\,;f)\}_{n=1}^\infty$ は f に一様収束することを示せ. (Weierstrass の多項式近似定理, Bernstein 多項式による近似).

$\boxed{17}$ f を閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続函数とする．もし，すべての非負整数 n に対して $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n dx = 0$ が成り立つならば，(函数として)$f=0$ となることを示せ．

$\boxed{18}$ n を正整数とし，f を開区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義された C^n 級の実数値函数であるとする．このとき，$a, x \in I$ に対して次が成り立つことを確認せよ．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x),$$

ただし，

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

剰余項 R_n のこの表示を用いて，$a < x$ のとき，$1 \le p \le n$ なる整数 p に対して，$a < \xi_p < x$ なる ξ_p が存在して，次が成り立つことを示せ (剰余項のこの表示を Roche-Schlömilch の剰余項と呼ぶ．特に $p = n$ のとき Lagrange の剰余項，$p = 1$ のとき Cauchy の剰余項と呼ぶ)．

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_p)}{(n-1)!p}(x-\xi_p)^{n-p}(x-a)^p.$$

$\boxed{19}$ $(\star)$ 与えられた実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級の函数 f で $f^{(n)}(0) = a_n\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ をみたすものを構成したい．以下の問いに答えよ．

(1) $\varepsilon_n > 0$ に対して $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級函数 $h_n(x)$ で

$$h_n(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le \varepsilon_n/2) \\ 0 & (|x| \ge \varepsilon_n) \end{cases}, \qquad 0 \le h_n(x) \le 1$$

をみたすものをとり，

$$g_n(x) = \int_0^x dt_{n-1}\int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2}\cdots\int_0^{t_1} h_n(t)dt$$

とおくとき，

$$g_n^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & (k \ne n) \\ 1 & (k = n) \end{cases}$$

であり，さらに

$$|g_n^{(k)}(x)| \le \frac{\varepsilon_n\,|x|^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

をみたすことを示せ．

(2) ε_n をうまく選ぶことで $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x)$ が求めるものになることを示せ．

$\boxed{20}$ $\mathbb{R}^3$ 内の曲線 C が $C := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8,\ x_1 + x_2 + x_3 = 4\}$ で与えられているとする.

(1) C が C^1 級の曲線であることを示せ. つまり, C 上の任意の点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ について, x の (C における) ある近傍において, x_1, x_2, x_3 のうち二つの変数がもう一つの変数の C^1 級函数であることを示せ.

(2) C 上における函数 $x_1x_2x_3$ の最大値および最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ.

◯ 定義: $\mathbb{R}^n$ 内の領域(連結な開集合) Ω が凸であるとは, 任意の $x, y \in \Omega$ および $0 < t < 1$ なるすべての実数 t について $(1-t)x + ty \in \Omega$ となることである.

$\boxed{21}$ $\mathbb{R}^3$ 内の凸領域 Ω における C^1 ベクトル場 $F = (F_1, F_2, F_3)$ について, 以下の条件は互いに同値であることを示せ.

(1) $F = \operatorname{grad}\varphi$ となる Ω 上の C^2 級函数 φ が存在する.　(2) $\operatorname{rot} F = 0$.

(3) Ω 内の任意の区分的に C^1 級の閉曲線 C について $\displaystyle\int_C F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3 = 0$.

◯ 記号: n を正整数とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. m を非負整数または ∞, ω とするとき, Ω 上の C^m 級函数全体を $C^m(\Omega)$ で表す. Ω の閉包を Ω^{cl} で表すとするとき,

$$C^m(\Omega^{\mathrm{cl}}) := \{f \mid \text{ある開集合 } \Omega' \supset \Omega^{\mathrm{cl}} \text{および } g \in C^m(\Omega') \text{ があって } g|_{\Omega^{\mathrm{cl}}} = f\}.$$

◯ 記号: n を正整数, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $f \in C^2(\Omega)$ について $\displaystyle\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ とし, Δ を Laplace 作用素 (Laplacian) と呼ぶ. 微分方程式 $\Delta f = 0$ を Laplace 方程式といい, その解 f を調和函数と呼ぶ.

$\boxed{22}$ Ω を $\mathbb{R}^3$ における有界な領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は有限個の C^1 級の曲面からなるものとする. このとき, 任意の $f, g \in C^2(\Omega^{\mathrm{cl}})$ について次の等式を示せ (Green の公式). ただし $\dfrac{\partial}{\partial n}$ は $\partial\Omega$ 上の外法線方向への方向微分, dS は $\partial\Omega$ の面積要素とする.

(1) $$\iiint_\Omega \left(f\Delta g + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n}dS,$$

(2) $$\iiint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\, dx_1dx_2dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}g \right) dS.$$

$\boxed{23}$ Ω は $\boxed{22}$ と同じものとし，$f \in C^2(\Omega^{\mathrm{cl}})$ を実数値調和函数とする．このとき，

(1) $\partial\Omega$ 上 $\dfrac{\partial f}{\partial n} = 0$ ならば，f は Ω 上定数であることを示せ.

(2) $\partial\Omega$ 上 $f = 0$ ならば，Ω 上 $f = 0$ であることを示せ.

$\boxed{24}$ (1) $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上の函数 $y \mapsto |y|^{-1}$ は調和函数であることを示せ.

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を凸領域とし，$f \in C^2(\Omega)$ を実数値調和函数とする． このとき, 任意の点 $x \in \Omega$ および $\{y \in \mathbb{R}^3\,;\, |y-x| \le \delta\} \subset \Omega$ なる任意の正実数 $\delta > 0$ に対して $\displaystyle\iint_{|y-x|=\delta} \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$ であることを示せ.

(3) $a > 0$ を $\{y \in \mathbb{R}^3\,;\, |y-x| \le a\} \subset \Omega$ なる正実数とする．$\boxed{22}$(2) を領域 $\Omega_\delta := \{y \in \mathbb{R}^3\,;\, \delta < |y-x| < a\}$ $(0 < \delta < a)$, 函数 $y \mapsto |y-x|^{-1}$ および f に適用することにより, 次の等式を示せ.

$$f(x) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{|y-x|=a} f(y) dS.$$

$\boxed{25}$ $\mathbb{R}^3$ 内の凸領域 Ω における C^1 ベクトル場 $F = (F_1, F_2, F_3)$ について, 以下の条件は互いに同値であることを示せ.

(1) $F = \operatorname{rot} E$ となる Ω 上の C^2 ベクトル場 $E = (E_1, E_2, E_3)$ が存在する.

(2) $\operatorname{div} F = 0$.

$\boxed{26}$ $(\star)$ $a \in \mathbb{R}^3$ を任意の点, $R > 0$ を任意の正実数とし，$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3\,;\, |x-a| < R\}$ とする．Ω^{cl} 上の C^1 級函数 f について, 任意の $x \in \Omega$ に対して広義積分 $\varphi(x)$ を以下で定義する．このとき, この広義積分は収束し, かつ函数 φ は Ω 上で $\Delta\varphi = -f$ を満たすことを示せ (Poisson 方程式).

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{f(y)}{|y-x|} dy_1 dy_2 dy_3$$

(ヒント： 各 $x \in \Omega$ に対して, 右辺の積分および導函数として現れる積分を必要に応じて $\Omega_{x,\delta} := \{y \in \Omega\,;\, |y-x| < \delta\}$ $(0 < \delta < R - |x-a|)$ 上の積分と $\Omega \setminus \Omega_{x,\delta}$ 上の積分に分けて考えよ.)

$\boxed{27}$ a, R および Ω は $\boxed{26}$ と同じものとし，$F = (F_1, F_2, F_3)$ を Ω 上の C^2 ベクトル場とする．このとき, Ω 上の C^3 級函数 φ および C^3 ベクトル場 $E = (E_1, E_2, E_3)$ が存在して $F = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot} E$ と表されることを示せ (Helmholtz の定理).

(ヒント： $\boxed{25}$ および $\boxed{26}$ を適用する方法を考えよ.)

$\boxed{28}$ (X,d) を距離空間とする.

(1) (X,d) は第 4 分離公理をみたす, 即ち $A\cap B=\emptyset$ なる X の任意の閉集合 A,B に対して, 開集合 U,V が存在して, $A\subset U$, $B\subset V$ かつ $U\cap V=\emptyset$ となることを示せ.

(2) さらに, (X,d) は第 6 分離公理をみたす, 即ち X の任意の閉集合 A が可算個の開集合の共通部分 (G_δ 集合) であることを示せ.

$\boxed{29}$ $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を可算個の距離空間の族とする. いま $X:=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ を直積空間とし, $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in X$ に対して $d(x,y)$ を次で定義する.

$$d(x,y):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}.$$

(1) d は X 上の距離函数であることを示せ.

(2) X 上の d により定まる位相は, 各 X_n 上の d_n により定まる位相から得られる直積位相と一致することを示せ.

(3) (X,d) が完備であることと, すべての正整数 n について (X_n,d_n) が完備であることが同値であることを示せ.

$\boxed{30}$ (1) X を第 2 可算公理をみたす正規空間, 即ち第 4 分離公理をみたす Hausdorff 空間とし, $\mathfrak{O}$ を X の開集合全体のなす集合族とする. このとき, X 上のある距離函数 d で, d から得られる位相が $\mathfrak{O}$ が与える位相と一致するものが存在することを示せ.

(2) (1) において, 「正規空間」を「正則空間」に替えてもよい, 即ち第 4 分離公理を第 3 分離公理 ($x\notin A$ なる閉集合 A および 1 点 x に対して開集合 U,V が存在して $x\in U$, $A\subset V$ かつ $U\cap V=\emptyset$ となる) に替えてもよいことを示せ.

$\boxed{31}$ (1) 可分な距離空間は第 2 可算公理をみたすことを示せ.

(2) ($\star$) 左半開区間 $X=(0,1]$ に対して, 次のような集合族を考える.

$$\mathfrak{O}=\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda,b_\lambda]\,;\,0\le a_\lambda<b_\lambda\le 1\}.$$

このとき, $\mathfrak{O}$ が開集合族の公理をみたすことを示せ. また, X にどのように距離を入れても, その距離から得られる位相は $\mathfrak{O}$ により与えられる位相と一致しないことを示せ.

$\boxed{32}$ ($\star$) Λ を非可算集合とし,$\{(X_\lambda,d_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ をそれぞれ点を 2 個以上もつ距離空間の族とする. このとき, 直積空間 $X:=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 上にどのように距離を入れても, それが定める位相が $\{(X_\lambda,d_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積位相とは一致しないことを示せ.

○ 記号: X を位相空間とするとき, X 上の複素数値連続函数, 実数値連続函数, 複素数値有界連続函数全体の空間をそれぞれ $C(X)$, $C(X)_{\mathbb{R}}$, $C_b(X)$ で表すことにする.

$$\begin{aligned} C(X) &:= \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, \text{連続}\,\}, \\ C(X)_{\mathbb{R}} &:= \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, \text{連続}\,\}, \\ C_b(X) &:= \{f \in C(X)\,;\, \text{有界}\,\}. \end{aligned}$$

$f, g \in C_b(X)$ に対して, $d(f,g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ とする.

○ 定義: $f \in C(X)$ について f の台 $\mathrm{supp} f$ を $\mathrm{supp} f := \{x \in X\,;\, f(x) \neq 0\}^{\mathrm{cl}}$ で定義する. さらに, X 上の台が compact な複素数値連続函数全体からなる空間を $C_c(X)$ と表すことにする.

$$C_c(X) := \{f \in C(X)\,;\, \mathrm{supp} f \text{ は compact}\}.$$

$\boxed{33}$ (1) X を位相空間とする. このとき, $(C_b(X), d)$ は完備距離空間であることを示せ. (以下, 特に断らなければ, $C_b(X)$ をこの距離 d による距離空間と考える.)

(2) $(\star)$ さらに, X が局所 compact Hausdorff 空間であるとする. このとき, $C_c(X)$ の $(C_b(X), d)$ における閉包はどのような函数の族か具体的に述べよ.

$\boxed{34}$ 函数 $\rho, d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定める.

$$\rho(x,y) := \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - y + k|, \quad d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho\left(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(1) d は $\mathbb{R}$ 上の距離函数であることを示せ.

(2) 数列 $\{2^m - 1\}_{m=1}^{\infty}$ は d についての Cauchy 列であることを示せ.

(3) $([0,+\infty), d|_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)})$ は完備距離空間でないことを示せ.

$\boxed{35}$ (X,d) を完備距離空間とする. また, X の部分集合 A に対して, A の直径 $d(A)$ を $d(A) := \sup\{d(x,y)\,;\, x, y \in A\}$ で与える.

(1) $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ かつ $\lim_{n\to\infty} d(B_n) = 0$ なる空でない閉部分集合の列とする. このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$ を示せ.

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ なる閉部分集合の族とする. このとき, 少なくとも 1 個の A_n は内点をもつことを示せ (Baire の category 定理).

(3) 位相空間 X および $C_b(X)$ の閉部分集合の列 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ で, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, $d(B_1) < \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} d(B_n) > 0$ を満たすが, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ となるものを一つ与えよ.

$\boxed{36}$ ($\star$) (1) 正整数 n に対し, $C([0,1])_{\mathbb{R}}$ の部分集合 C_n を以下で定義する.

$$C_n := \{f \in C([0,1])_{\mathbb{R}}\,;\ \text{ある } x \in [0,1] \text{ について} \sup_{y \neq x} \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \leq n\}.$$

このとき C_n は内点をもたない閉部分集合であることを示せ.

(2) (1) および $\boxed{35}$ (2) を用いて $[0,1]$ 上のどの点においても微分不可能な連続函数が存在することを示せ.

$\boxed{37}$ 距離空間 (X,d) が全有界であるためには, X の任意の点列が Cauchy 部分列をもつことが必要十分であることを示せ.

○ 定義: 距離空間 (X,d) 上の函数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が点 $a \in X$ において同程度連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して, $d(x,a) < \delta$ ならばすべての $\lambda \in \Lambda$ について $|f_\lambda(x) - f_\lambda(a)| < \varepsilon$ が成り立つことである. また $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が点 $a \in X$ において有界であるとは, $M > 0$ が存在して $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} |f_\lambda(a)| \leq M$ であることとする.

$\boxed{38}$ m を正整数とし, $K \subset \mathbb{R}^m$ を compact 部分集合とする. いま $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(K)$ を K 上の各点において有界かつ同程度連続な函数族とする. このとき K 上一様収束する $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列が存在することを示せ.

$\boxed{39}$ m および K は $\boxed{38}$ と同じものとし, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(K)$ とする. もし $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ の任意の部分列が K 上一様収束する部分列をもてば, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は K の各点において有界かつ同程度連続であることを示せ.

○ 参考: $\boxed{38}$, $\boxed{39}$ の主張を Arzelà-Ascoli の定理という.

$\boxed{40}$ (1) ($\star$) $\mathcal{F}$ を閉区間 $[a,b]$ $(a < b)$ 上の実数値連続函数族で, すべての函数 $f \in \mathcal{F}$ がある $x_0 \in [a,b]$ において同じ値 y_0 をとるものとする. もし $\mathcal{F}$ が同程度連続であれば $g(x) := \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} f(x)$ $(x \in [a,b])$ で与えられる函数 g も $[a,b]$ 上連続であることを示せ.

(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の一様有界な実数値連続函数列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ で, すべての $x \in [0,1]$ において実数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ は単調増加であり, かつすべての正整数 n について $f_n(0) = 0$ を満たすが, その極限函数が $[0,1]$ 上連続でないものを一つ与えよ.

(3) (1) において, 同程度連続性を仮定しなければ, 一般に g は連続ではないが, 下半連続であることを示せ.

$\boxed{41}$ (X,d) を compact 距離空間とする．いま，$f : X \longrightarrow X$ を任意の $x, y \in X$, $x \neq y$ について $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ が成り立つ写像とする．このとき，$f(x) = x$ なる $x \in X$ がただ 1 つ存在することを示せ.

$\boxed{42}$ $X = [0,1] \times [0,1]$ とし，$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ を必ずしも連続でない函数とする．いま，X 上の 2 点 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対して，$d(x,y)$ を次のように定める.

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (f(x) - f(y))^2}.$$

(1)　d は X 上の距離函数になることを示せ.

(2)　(X,d) が compact になるためには，f が連続であることが必要十分であることを示せ.

$\boxed{43}$ $p > 0$ を素数とし，0 でない整数 x に対して $|x|_p$ を次のように定める.

$$x = p^m a,\ m \text{ は非負整数},\ p \text{ と } a \text{ は互いに素とするとき},\ |x|_p := p^{-m}.$$

また，$|0|_p = 0$ と定めておく.

(1)　$x, y \in \mathbb{Z}$ に対して $d(x,y) = |x-y|_p$ とする．このとき，$(\mathbb{Z}, d)$ は距離空間であることを示せ.

(2) $(\star)$　d に関する $\mathbb{Z}$ の完備化を $\mathbb{Z}_p$ と表すことにする．このとき，$(\mathbb{Z}_p, d)$ は compact であることを示せ．さらに，$\mathbb{Z}$ の加法，乗法を $\mathbb{Z}_p$ に連続に拡張すると，$\mathbb{Z}_p$ も整域になり，加法，乗法ともに連続であることを示せ.

$\boxed{44}$ $(\star)$　$p > 0$ を素数とし，有理数 x に対して $|x|_p$ を以下のように定める.

$$|x|_p := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ p^{-m}, & x = p^m \dfrac{a}{b},\ m \in \mathbb{Z},\ a, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \text{ で},\ a, b \text{ は互いに素}. \end{cases}$$

(1)　$x, y \in \mathbb{Q}$ に対して，$d(x,y) = |x-y|_p$ とおく．このとき，$(\mathbb{Q}, d)$ は距離空間であることを示せ.

(2)　$\mathbb{Q}$ の d に関する完備化を $\mathbb{Q}_p$ と表すことにする．このとき，$(\mathbb{Q}_p, d)$ は局所 compact であることを示せ.

(3)　$\mathbb{Z}_p$ を $\boxed{43}$ で与えられたものとする．このとき，$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p ; |x|_p \leq 1\}$ であり，$\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Z}_p$ の商体であることを示せ.

○ 参考：$\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ をそれぞれ p 進体，p 進整数環と呼び，$\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ の元をそれぞれ p 進数，p 進整数という.

$\boxed{45}$ 函数 f は $D=\{z\in\mathbb{C};\,|z|<R\}$ において正則であるとする．また $a_n\ (n=0,1,2,\ldots)$ は D に属する相異なる実数で $n\to\infty$ の時に 0 に収束し，$f(a_n)\in\mathbb{R}\,(n=0,1,2,\ldots)$ であるとする．

(1) D において $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ であることを示せ．

(2) a_n がすべて正で $f(a_{2n})=f(a_{2n+1})$ がすべての $n=0,1,2,\ldots$ について成り立つなら，f は定数函数であることを示せ．

$\boxed{46}$ 函数 f が $\mathbb{C}$ において正則でさらに一様に連続であるとする．このとき，f は高々1 次の多項式であることを示せ．

$\boxed{47}$ $(\star)$ f は $\{\mathrm{Re}(z)>0\}$ で正則とする．さらに，$\mathrm{Re}(f)\geq 0$ とする．

(1) $c\geq 0$ があって，$\mathrm{Re}(f(z))\geq c\,\mathrm{Re}(z)$ となることを示せ．

(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たしている α につき，一様に $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty\\|\arg(z)|<\alpha}}\frac{f(z)}{z}$ が存在することを示せ．

$\boxed{48}$ 正実数 R を 1 つ固定する．このとき，$P_n(z)=1+\dfrac{z}{1!}+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}$ は，n を十分大きくとれば $\{z\in\mathbb{C};\,|z|<R\}$ において零点を持たないことを示せ．

$\boxed{49}$ 次の積分を計算せよ．ただし，積分路 Γ は単位円周を反時計にまわる経路とする．

$$(1)\ I=\oint_\Gamma\frac{dz}{\sin\,z},\qquad (2)\ J=\oint_\Gamma\sin\left(\frac{1}{z}\right)dz,\qquad (3)\ K=\oint_\Gamma\frac{dz}{\sin\,(1/z)}.$$

$\boxed{50}$ $\alpha\in\mathbb{C}\ (\mathrm{Im}\,\alpha\neq 0)$, $t\in\mathbb{R}$ として，$I=\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{itx}dx}{x-\alpha}$ を計算せよ．

$\boxed{51}$ e^{iz^3} を領域 $D_R=\{z\in\mathbb{C};\,0<|z|<R,\ 0<\arg z<\pi/6\}$ の境界に沿って積分することで次を示せ．

$$\int_0^\infty\cos(x^3)\,dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\quad \int_0^\infty\sin(x^3)\,dx=\frac{1}{6}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

ただし，積分は広義 Riemann 積分で考えているものとする．

$\boxed{52}$ 函数 f が単位円板 $D=\{z\in\mathbb{C};\,|z|<1\}$ において正則で，$\displaystyle\iint_D|f(x+iy)|dxdy<\infty$ を満しているとする．このとき，次が成り立つことを示せ (Bergman の核公式).

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{f(\zeta)}{(1-z\overline{\zeta})^2}d\xi d\eta\quad (z\in D,\ \text{ただし}\ \zeta=\xi+i\eta).$$

$\boxed{53}$ 冪級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ を考える.

(1) α が有理数のとき, $\displaystyle\lim_{r\to 1-0} |f(re^{i\alpha\pi})| = \infty$ となることを示せ.

(2) $|a| = 1$ を満たす任意の $a \in \mathbb{C}$ について, どのように a の近傍 U を取っても, $f(z)$ が U において正則に拡張されない, 即ち $S^1 = \{|z| = 1\}$ は f の自然境界であることを示せ.

○ 定義: X を局所 compact 位相空間とする. 函数族 $\mathfrak{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset C_b(X)$ が正規族であるとは, $\mathfrak{F}$ の元からなる任意の函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X のすべての compact 部分集合 $K \subset X$ 上で (K ごとに) 一様収束する部分列をもつことである.

○ 定義: K を位相空間 X における compact 集合とする. 函数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が K 上一様有界であるとは, 正実数 $M > 0$ が存在して $|f_\lambda(x)| \leq M \quad (x \in K, \lambda \in \Lambda)$ が成り立つことである.

$\boxed{54}$ (1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ の収束半径を求めよ.

(2) 多項式函数全体のなす族は $\mathbb{C}$ 内のいかなる領域においても正規族にはならないことを示せ.

$\boxed{55}$ $D \subset \mathbb{C}$ を領域とし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を D 上の正則函数とする. D 内の相異なる点からなる点列 $\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D$ が D の点 $a \in D$ に収束しているとする. もし, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が D の任意の compact 部分集合上で一様有界であり, $\{f_n(a_m)\}_{n=1}^{\infty}$ がすべての正整数 m について収束するならば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は D のすべての compact 部分集合上で一様収束することを示せ (Vitali の定理).

$\boxed{56}$ ($\star$) D_1, D_2 を複素平面上の領域, $f : D_1 \to D_2$ は連続函数, $g : D_2 \to \mathbb{C}$ は定数ではない正則函数とする. $g \circ f$ が正則函数ならば, f 自体も実は正則であることを示せ.

$\boxed{57}$ $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上で定義された D 内に値をとる正則函数 $f(z)$ が $f(z_0) = z_0$ を満たしているとする. 次の 2 つのうちどちらか一方が成り立つことを示せ. ただし, f_n は f を n 回合成して得られる函数とする.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(z) = z_0$ がすべての $z \in D$ に対して成り立つ.

(b) f は全単射である.

$\boxed{58}$ $(\star)$ N を正の整数とし，$a_1, a_2, \cdots, a_N$, $b_1, b_2, \cdots, b_N$ は実定数で $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ かつ $b_1, b_2, \cdots, b_N > 0$ を満たすとする．このとき，次の積分を求めよ．

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{x - a_j} \right)^2 \right] dx.$$

$\boxed{59}$ $(\star)$ $f(z)$ が原点 $z = 0$ を含む有界領域 Ω での正則自己同型であるとする．$f(0) = 0$, $f'(z) > 0$ であれば，$f(z) \equiv z$ であることを示せ．

$\boxed{60}$ 次の各領域における Green 函数を求めよ．

(1) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(2) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

(3) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$.

$\boxed{61}$ (1) u を $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上定義された $(-\infty, 0)$ に値をとる調和函数とする．$M_0 = \sup_{|z|=1/2} u(z)$ とおくとき，

$$\limsup_{r \uparrow 1} \frac{u(r\xi)}{1 - r} \leq M_0 \log 2$$

を示せ．

(2) $f : D \to D$ を正則函数として，次のことを仮定する．

$$\lim_{z \in D,\, z \to 1} \frac{f(z) - z}{(1 - z)^3} = 0.$$

ここで, ϕ, u を以下のものとする．

$$\phi(z) = \frac{1 + z}{1 - z}, \quad v(z) = \mathrm{Re}(\phi(z) - \phi(f(z))).$$

このとき，$\xi \in \partial D \setminus \{1\}$ に対して, 以下のことを示せ．

$$\limsup_{z \to \xi,\, z \in D} v(z) \leq 0, \qquad \lim_{z \to 1,\, z \in D} \frac{v(z)}{1 - z} = 0.$$

(3) $v(z) \equiv 0$, $f(z) \equiv z$ を示せ．

(4) $(\star)$ $g : D \to D$ を正則函数として，ある $M > 0$ が存在して

$$|g(z) - z| \leq M|z - 1|^3$$

と仮定しても $g(z) \equiv z$ とならないことを示せ．

$\boxed{62}$ (1) n を正整数とするとき, $z \mapsto \prod_{|m|>n} \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) e^{z/m\pi}$ は $\mathbb{C}$ のすべての compact 部分集合上で一様収束することを示せ.

(2) $\cot z = \frac{(\sin z)'}{\sin z}$ $(z \notin \pi\mathbb{Z})$ を用いて $\sin z = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{z/n\pi}$ を示せ. ここで, $\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$ $(z \in \mathbb{C})$ は証明せずに用いてよい.

(3) $\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$ を示せ (Wallis の公式).

$\boxed{63}$ $\alpha > 0$ に対して，曲線 $\gamma_\alpha : (0, 3) \to \mathbb{C}$ を以下で定義する

$$\gamma_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{t} - \pi i, & (0 < t \leq 1 \text{ のとき}), \\ \alpha + 2\pi i t - 3\pi i, & (1 \leq t \leq 2 \text{ のとき}), \\ \dfrac{\alpha}{3 - t} + \pi i, & (2 \leq t < 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

さらに，f_α を以下のものとする.

$$f_\alpha(z) = \int_{\gamma_\alpha} \frac{\exp(e^w)}{z - w} \, dw, \quad \text{ただし } z \notin \gamma_\alpha.$$

(1) $z \in \mathbb{C}$ と $|z|$ よりも大きい実数 α, β に対して，$f_\alpha(z) = f_\beta(z)$ となることを示せ.

(2) 問題 (1) を踏まえて，$\mathbb{C}$ 上の正則函数 f を $f(z) = \lim_{\alpha \to \infty} f_\alpha(z)$ で定める．いま, $\theta \in \mathbb{R}$ を $e^{i\theta} \neq 1$ となるものとする．このとき，$\lim_{r \to \infty} f(re^{i\theta}) = 0$ であることを示せ.

(3) f は定数函数ではないことを示せ.

(4) $\lim_{n \to \infty} g(nz) = \chi_{\{0\}}(z)$ となる整函数が存在することを示せ.

$\boxed{64}$ $(\star)$ u を $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上定義された調和函数とする．$u(z) \leq -\log |\mathrm{Im}(z)|$ を $z \in D$ で満たしているとすると，$u(z) \leq -\log \left| \frac{1 - z^2}{2} \right|$ を満たしていることを示せ.

$\boxed{65}$ $(\star)$ $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ とする．また，$\lambda > 0$ とする．h と k を $\overline{D}$ を超えて定義された実数値調和函数で以下をみたすものとする.

$$|h(0)|, \, |k(0)|, \, |\max(h, 0) - \max(k, 0)| \leq \lambda, \quad \max(h, k) \geq -\lambda.$$

(1) ある定数 c_0 が存在して，$\sup_{|z|<1/2} h \leq c_0\lambda$, $\sup_{|z|<1/2} k \leq c_0\lambda$ が成り立つことを示せ.

(2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ に値をとる正則函数とする．また，$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{|z|<1} |f_k(z)| \right) < \infty$ が成り立つとする．このとき，ある部分列は局所一様に収束していることを示せ.

$\boxed{66}$ 微分方程式 $x(1-x^3)y' = x^2 + y - 2xy^2,\ 0 < x < 1$ を考える．

(1) $y_0 = x^2$ が解であることを証明せよ．

(2) ほかの解が求積できることを証明せよ．

$\boxed{67}$ 連続な函数 $y(x)$ が次の方程式 $\displaystyle\int_0^x t\,y(x-t)\,dt = y(x) + 4$ を満たしている．

(1) $y(0), y'(0)$ を求めよ．

(2) $y(x)$ を求めよ．

$\boxed{68}$ それぞれの問題において $(0,\infty)$ で定義されている解を求めよ．ただし，x は変数 t の函数であるとする．必要に応じて原点中心の Puiseux 展開を用いて無限級数表示すること．

(1) $x'' + \dfrac{1}{2t}x' + \dfrac{1}{4t}x = 0$

(2) $x'' + \left(1 - \dfrac{2}{t}\right)x' + \left(\dfrac{2-t}{t^2}\right)x = 0$

(3) $x'' + \dfrac{3}{t}x' - \dfrac{3}{t^2}x = 0$

(4) $x'' + \left(\dfrac{2+t^2}{t}\right)x' + \left(1 - \dfrac{2}{t}\right)x = 0$

(5) $tx'' + x' - x = 0$

$\boxed{69}$ $k : (a,b) \to \mathbb{R}$ を連続函数とする．また，$c \in (a,b)$ とする．

(1) C^1-級函数 $x : (a,b) \to \mathbb{R}$ が $x'(t) + x(t)^2 + k(t) = 0$ を満たしているとする．$f(t) = \exp\left(\displaystyle\int_c^t x(s)\,ds\right)$ とおくと，$f''(t) + k(t)f(t) = 0$ を満たしていることを示せ．

(2) C^2-級函数 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ が $f''(t) + k(t)f(t) = 0,\ f(t) \neq 0$ を満たしているとする．このとき，$x(t) = \dfrac{f'(t)}{f(t)}$ とおけば，$x'(t) + x(t)^2 + k(t) = 0$ が成り立つ．

(3) $\lambda > 0,\ \tau, K \in \mathbb{R}$ を定数とする．初期条件 $F(\tau) = K$ の下で次の各微分方程式 (i)$F'(t) + F(t)^2 + \lambda^2 = 0$, (ii)$F'(t) + F(t)^2 = 0$, (iii)$F'(t) + F(t)^2 - \lambda^2 = 0$ を解け．

$\boxed{70}$ C_1, C_2 は正定数とする．$\xi : [0,T] \to [0,\infty)$ は連続函数で不等式 $\xi(t) \le C_1\displaystyle\int_0^t \xi(s)\,ds + C_2$ を満たしているとする．このとき，$\xi(t) \le C_2\,e^{C_1 t}(1 + C_1\,t)$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{71}$ $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は C^1-級の単調増加な奇函数で，$a(1) = 1$ を満たすものとする．次の微分方程式

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a(y) = 0,\ y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 1$$

の解 $y(t)$ について以下の問に答えよ．

(1) $y(t)$ は零点を持つことを示せ.

(2) ($\star$) $y(t)$ は 8 より小さい周期を持つことを示せ.

$\boxed{72}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(a)=0$ となるような実数値 C^1-級函数とする．$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値函数 $u=u(x)$ は常微分方程式

$$\frac{du}{dx}(x)+f(u(x))=0$$

を満たす．次のことを示せ.

(1) $u(0)>a$ のとき，$u(x)>a$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して成り立つ.

(2) $f(u)>0,\ u>a$ と $f(u)<0,\ u<a$ が成り立つとする．このとき，$\lim_{x\to\infty}u(x)=a$ が成り立つ.

(3) ($\star$) 正の数 $c>0$ が存在して $\dfrac{df}{du}\geq c$ ならば，$\limsup_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\log|u(x)-a|\leq -c$ である.

$\boxed{73}$ $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上のなめらかな 1 次微分形式 $\omega=f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy$ が次の 3 条件を満たすとする.

(i) $d\omega=0$.

(ii) $\sqrt{x^2+y^2}=1$ のとき，$\omega=x\,dx+y\,dy$.

(iii) $\sqrt{x^2+y^2}=2$ のとき，$\omega=-x\,dx-y\,dy$.

次の問に答えよ.

(1) ω は $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上の完全形式であることを示せ.

(2) ($\star$) ω は $1<\sqrt{x^2+y^2}<2$ 上で消えることを証明せよ.

○ 自励系の微分方程式系 $\dfrac{dx}{dt}=f(x,y),\ \dfrac{dy}{dt}=g(x,y)$ の平衡点とは $f(x,y)=g(x,y)=0$ となる (x,y) のことであるとする．平衡点 (x_0,y_0) の周りで f,g を Taylor 展開して得られる微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),\ \dfrac{dy}{dt}=g_x(x_0,y_0)(x-x_0)+g_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ を線形化方程式という．さらに，$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ の固有値を α,β とおく．(i)$\alpha,\beta>0$ のとき，湧き出しという．(ii)$\alpha,\beta<0$ のとき，吸い込みという．(iii)$\alpha\beta<0$ のとき，鞍点という．(iv)α,β が純虚数のとき，渦点という.

$\boxed{74}$ 以下のような常微分方程式の初期値問題を考える.

$$(x'(t),y'(t),z'(t))=(\lambda-\alpha\,x(t)-\beta\,x(t)z(t),\beta\,x(t)z(t)-\gamma\,y(t),\delta\,y(t)-\varepsilon\,z(t))$$

ただし，$\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon>0$ は定数であり，$\alpha\leq\gamma$ とする．$0<t<\infty$ に対して初期

条件

$$x(0)=\lim_{t\downarrow 0}x(t)>0,\ y(0)=\lim_{t\downarrow 0}y(t)>0,\ z(0)=\lim_{t\downarrow 0}z(t)>0$$

を与えると一意的に解が得られると仮定する．

(1) $t>0$ として $x(t)>0,\ \ y(t)>0,\ \ z(t)>0$ を示せ．

(2) $x(0)+y(0)\le\dfrac{\lambda}{\alpha}$ であれば，$x(t)+y(t)\le\dfrac{\lambda}{\alpha},\ t>0$ となることを示せ．

(3) $(x,y,z)=(\lambda/\alpha,0,0)$ という自明な定常解が存在するが，それ以外の正の定常解が存在するための必要十分条件を求めよ．

(4) (3) の条件が満たされるなら，$(x,y,z)=(\lambda/\alpha,0,0)$ は不安定であることを示せ．

$\boxed{75}$ ウサギは個体数 x に応じて増加するが，狐により捕食されて減少する．一方，狐はウサギがいないときは個体数 y に応じて死滅するが，ウサギの数に応じて増加する．このことを微分方程式で表すと

$$\frac{dx}{dt}=a\,x-b\,x\,y,\ \frac{dy}{dt}=-c\,y+d\,x\,y$$

と表される．ただし，$a,b,c,d>0$ で，$ad-bc\neq 0$ と仮定する．

(1) 平衡点を求めよ．

(2) 平衡点の性質 (湧き出し，吸い込み，鞍点，渦点等) を調べよ．

$\boxed{76}$ $\beta,\gamma,\delta,\mu,b$ をすべて正の定数とする．以下の連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{dx}{dt}(t)=-\beta\,x(t)v(t),\ \frac{dy}{dt}(t)=\beta\,x(t)v(t)-\gamma\,y(t),$$
$$\frac{du}{dt}(t)=b-(\mu+\delta\,y(t))u(t),\ \frac{dv}{dt}(t)=\delta\,y(t)u(t)-\mu\,v(t)$$

ただし，初期条件は

$$x(0)=x_0>0,\ y(0)=y_0\ge 0,\ u(0)=u_0>0,\ v(0)=v_0\ge 0$$

とする．この微分方程式には解が唯一存在すると仮定してよい．

(1) $t>0$ に対して $x(t)>0,\ y(t)\ge 0,\ u(t)>0,\ v(t)\ge 0$ であることを証明せよ．

(2) 任意の $\alpha>0$ に対して，$P^*:=\left(\alpha,0,\dfrac{b}{\mu},0\right)$ が平衡点になることを示せ．さらに，パラメーター R_0 を $R_0:=\dfrac{\alpha\,\beta\,\delta\,b}{\gamma\,\mu^2}$ と定めると，P^* は $R_0<1$ のとき，局所漸近安定 (吸い込み) であり，$R_0>1$ のとき不安定であることを示せ．

(3) $(\star)$ $x_\infty=\lim_{t\to\infty}x(t)$ は有限確定であることを示し，$J=\displaystyle\int_0^\infty y(t)\,dt$ を x_∞ で表せ．

(4) $x_\infty>0$ であることを示せ．

$\boxed{77}$ 次の微分方程式は，ある電気回路に現れる非線形振動 (oscillation) を記述するモデルである．

$$(OSC) \quad \frac{dx}{dt} = y + (1 - x^2)x,\ \frac{dy}{dt} = -\varepsilon x.$$

ここで，$t \geq 0$であり，$\varepsilon > 0$は正定数である．y軸上の勝手な初期値$x(0) = 0,\ y(0) = a \neq 0$から出発する解は再び$y$軸に到達することを既知とする．初めて到達する点を$(0, b)$とおくと，$a \mapsto b$によって写像$b = f(a)$が定義される．

(1) fはaの奇函数であることを証明せよ．

(2) $c + f(c) = 0$なる$c > 0$が存在すれば，$(0, c)$を通る解は周期解であることを示せ．

(3) $\varepsilon \ll 1$のとき，(OSC)の解曲線の概形を推測してxy平面に書け．

(4) $\varepsilon > 0$のとき，大きい正の数aに対しては$a + f(a) > 0$となり，小さい正の数aに対しては$a + f(a) < 0$となることを (3) で描いた概形を用いて示せ．

(5) ($\star$) $\varepsilon \ll 1$のとき，(OSC)は少なくとも一つの周期解をもつことを示せ．

$\boxed{78}$ ($\star$) 次の方程式$x' = y^2 - x^4,\ y' = x^3 y$ の平衡点$(x, y) = (0, 0)$における指数を求め，周期軌道を持たないことを証明せよ．ただし，x, yは時間tの函数であるとする．

$\boxed{79}$ x, yは時間tの函数であるとする．$f(x, y), g(x, y)$を以下のものとし，方程式$x' = f(x, y), y' = g(x, y)$を考える．

$$f(x, y) = y + x + x^3, \quad g(x, y) = x + y^3.$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 平衡点をすべて特定せよ.

(2) $V = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$ を計算せよ.

(3) 周期軌道を持たないことを示せ.

◯ 実数全体で定義されている自励系の微分方程式系$\dfrac{dx}{dt} = f(x, y),\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y)$が極限周期解をもつとは，ある初期値$x(0) = x_0$の解があって

$$L^+(\gamma) = \{x : \text{ある}\ \infty\ \text{に発散する単調増大数列}\ \{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}\ \text{があって，}\lim_{j \to \infty} x(t_j) = x\}$$

と表される集合の十分小さい近傍には$L^+(\gamma)$以外に周期解がないことと定義する．

$\boxed{80}$ 微分方程式$x' = -x - y + x(x^2 + 2y^2),\ y' = x - y + y(x^2 + 2y^2)$は極限周期解をもつことを示せ．ただし，$x, y$は時間$t$の函数であるとする．

○ 記号: X を集合とし $\mathcal{F}$ を X の部分集合からなる族とする. このとき, $\mathcal{F}$ で生成される σ-algebra(σ-加法族) を $\sigma(\mathcal{F})$ と表すことにする.

$\boxed{81}$ X, Y を集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とする.
(1) X 上の σ-algebra $\mathcal{A}$ に対して, Y 上の集合族 $\{f(A) \subset Y\,;\, A \in \mathcal{A}\}$ は一般に σ-algebra ではないが, $\{B \subset Y\,;\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ は σ-algebra であることを示せ
(2) $\mathcal{F}$ を Y の部分集合の族とし $f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(A) \subset X\,;\, A \in \mathcal{F}\}$ を $\mathcal{F}$ とする. このとき, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \{f^{-1}(B) \subset X\,;\, B \in \sigma(\mathcal{F})\}$ を示せ.

○ 定義: 位相空間 X の開集合全体からなる族 $\mathcal{O}_X$ から生成される σ-algebra $\sigma(\mathcal{O}_X)$ を X 上の Borel 集合族と呼び $\mathcal{B}(X)$ で表すことにする. また $\mathcal{B}(X)$ の元を X の Borel 集合と呼ぶ. 以下特に断りがなければ X 自身を可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ とみなす.

$\boxed{82}$ ($\star$) (1) 距離空間 (X, d) について $\mathcal{B}(X)$ は X 上のすべての実数値連続函数を可測にする最小の σ-algebra であることを示せ.
(2) 一般の位相空間 X については (1) の主張は正しくない. それを反例をもって示せ. ここで, X に Hausdorff 性を仮定しなくてもよい.

$\boxed{83}$ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を $\mu(X) = 1$ なる測度空間, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $A_n \in \mathcal{B}$ なる X の部分集合からなる列で, 以下の性質が成り立つとする.
(I) σ-集合族の族 $\{\sigma(\{A_n\})\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ が独立, 即ち任意の $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ なる非負整数の列について, $B_l = A_{j_l}$ または $A_{j_l}^c$ とするとき, $\mu(\bigcap_{l=1}^{k} B_l) = \prod_{l=1}^{k} \mu(B_l)$.
もし, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = +\infty$ であれば, $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ が成り立つことを示せ (Borel-Cantelli の定理). ここで, $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ とする.

$\boxed{84}$ ($\star$) (1) 1 次元 torus $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ に次のように関係を入れる. ただし i は虚数単位とする.

$$z \sim w \Leftrightarrow z = e^{it}, w = e^{is}, t - s \in \mathbb{Z} \text{ なる } t, s \in \mathbb{R} \text{ が存在する.}$$

この関係は同値関係であることを示せ.
(2) $A \subset \mathbb{T}$ を (1) の同値関係についての完全代表系とする. いま $f : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{T}$ を $f(x) := e^{2\pi i x}\ (x \in [0, 1))$ とする. このとき $f^{-1}(A) \subset [0, 1)$ は Lebesgue 非可測集合であることを示せ.

○ 定義 $C=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}\,;\,a_n=0,1\,(n\in\mathbb{N})\right\}$ を Cantor 集合と呼ぶ. $f\,:\,[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ を C 上で $f\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2a_n}{3^n}\right):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ とし, $O:=[0,1]\setminus C$ 上では $f(x):=\sup\{f(y)\,;\,y\in C,\,y<x\}$ と定義する. この函数 f を Cantor 函数と呼ぶ.

$\boxed{85}$ (1) $f\,:\,[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ を Cantor 函数, $g\,:\,[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ を $g(x):=\inf\{y\in[0,1]\,;\,f(y)\geq x\}$ $(x\in[0,1])$ とする. このとき g の像は Cantor 集合に含まれることを示せ.
(2) $B\subset[0,1]$ を Lebesgue 非可測集合とする. このとき $g(B)\subset\mathbb{R}$ は Lebesgue 可測集合であるが Borel 集合ではないことを示せ.

○ 定義: 集合 X の部分集合 A,B に対して $A\Delta B:=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ を (A と B の) 対称差と呼ぶ. 特に, $A\Delta\emptyset=A$, $A\Delta X=A^c$, $A\Delta A^c=X$ が成り立つ. ただし, $A\subset X$ に対して $A^c=X\setminus A$ は A の補集合を表す.

$\boxed{86}$ $(X,\mathfrak{B},\mu)$ を有限測度空間 (つまり $\mu(X)<\infty$) とする.
(1) $A,B\in\mathfrak{B}$ に対して $d_0(A,B):=\mu(A\Delta B)$ とする. このとき, 以下の性質が成り立つことを示せ.
(i) $d_0(A,A)=0,\quad A\in\mathfrak{B}$.
(ii) $d_0(A,B)=d_0(B,A),\quad A,B\in\mathfrak{B}$.
(iii) $d_0(A,C)\leq d_0(A,B)+d_0(B,C),\quad A,B,C\in\mathfrak{B}$.
(2) $A,B\in\mathfrak{B}$ について $d_0(A,B)=0$ のとき $A\sim B$ とする. このとき, 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(3) $(\star)$ 同値関係 $\sim$ についての商空間を $\widetilde{\mathfrak{B}}:=\{[A]\,;\,[A]\text{ は }A\text{ を含む同値類}\}$ と表すことにする. このとき $d([A],[B]):=d_0(A,B)$ は代表元のとり方に依らないことを示し, d が $\widetilde{\mathfrak{B}}$ 上の距離函数になっていることを示せ.

$\boxed{87}$ (1) $E\subset\mathbb{R}$ を可測集合, f を E 上の $+\infty$ をとらない非負値可測函数とする. このとき, 任意の $\epsilon>0$ に対して閉集合 $A\subset E$ で $\mu(E\backslash A)<\epsilon$ かつ f が A 上で連続となるものが存在することを示せ (Luzin の定理).
(2) $g\,:\,[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ を $\boxed{85}$ における Borel 可測函数とする. このとき, 任意の $\epsilon>0$ に対して (1) の性質を満たす閉集合 $A\subset[0,1]$ を与えよ.

$\boxed{88}$ 任意の実数 t について, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx-x^2}dx$ を Lebesgue の収束定理 (dominated convergence theorem) を用いて求めよ.

○ 記号: $(X, \mathfrak{B}_X)$, $(Y, \mathfrak{B}_Y)$ を可測空間, p_X, p_Y をそれぞれ直積空間 $X \times Y$ から X, Y への (自然な) 射影とするとき, $\mathfrak{B}_X \otimes \mathfrak{B}_Y := \sigma(p_X^{-1}(\mathfrak{B}_X) \cup p_Y^{-1}(\mathfrak{B}_Y))$ とする.

○ 定義: $(X, \mathfrak{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathfrak{B}_Y, \mu_Y)$ をともに σ-有限な測度空間とする. このとき, 可測空間 $(X \times Y,\ \mathfrak{B}_X \otimes \mathfrak{B}_Y)$ 上に次を満たす測度 μ が一意的に定まる (各自確かめよ).

$$\mu(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B),\ \text{ただし}\ A \in \mathfrak{B}_X, B \in \mathfrak{B}_Y, \mu_X(A), \mu_Y(B) < +\infty.$$

このとき $(X \times Y, \mathfrak{B}_X \otimes \mathfrak{B}_Y, \mu)$ を $(X, \mathfrak{B}_X, \mu_X)$ と $(Y, \mathfrak{B}_Y, \mu_Y)$ の直積測度空間と呼び, μ を μ_X, μ_Y の直積測度と呼ぶ. しばしばこの μ を $\mu_X \otimes \mu_Y$ と書く.

$\boxed{89}$ $(X, \mathfrak{B}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathfrak{B}_Y, \mu_Y)$ をともに σ-有限な完備測度空間とする. このとき, 直積測度空間 $(X \times Y, \mathfrak{B}_X \otimes \mathfrak{B}_Y, \mu_X \otimes \mu_Y)$ は必ずしも完備ではない. このことを反例をもって示せ.

○ 記号: 以下の問題において, $\mathbb{R}^n$ (n は正整数) は Lebesgue 可測集合全体のなす σ-algebra $\mathfrak{M}_n$ および n 次元 Lebesgue 測度 μ_n をもって Lebesgue 測度空間と考える. また, 混乱の恐れのない場合は Lebesgue 積分は $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ の形で表すことにする.

$\boxed{90}$ f を σ-有限な測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の非負値可積分函数とする. いま $y > 0$ なる y に対して $g(y) := \mu(\{x \in X\,;\, f(x) \geq y\})$ とする. このとき $\displaystyle\int_X f(x)d\mu(x) = \int_0^\infty g(y)dy$ を示せ.

$\boxed{91}$ f を $\mathbb{R}$ 上の実数値可測函数で, $\mu_1(A) < +\infty$ なる Lebesgue 可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ 上において $\int_A |f(x)|dx < \infty$ が成り立つとする. いま, 任意の $y \in \mathbb{R}$ および $\mu_1(A) < +\infty$ なる $A \in \mathfrak{M}_1$ に対して $\displaystyle\int_A f(x+y)dx = \int_A f(x)dx$ が成り立つならば, ある実数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して, $f(x) = c$ a.a.x が成り立つことを示せ.

○ 記号: $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間とし, $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ を X 上の可積分函数とする. このとき, $\displaystyle\|f\|_1 := \int_X |f(x)|d\mu(x)$ とおく.

$\boxed{92}$ (1) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ をともに可積分函数とする. このとき, ほとんとすべての $\mathbb{R}$ に対して $\displaystyle f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$ が収束し, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$ が成り立つことを示せ (この $f * g$ を f と g の合成積, あるいは畳み込みという).

(2) $\mathbb{R}$ 上のすべての可積分函数 f に対して $f * g = f$ a.e. となる $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 g は存在しないことを示せ.

$\boxed{93}$ (1) 可測集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ について次の式を示せ. ここで $A+x := \{y+x \in \mathbb{R}\,;\, y \in A\}$ $(x \in \mathbb{R})$ であり, また $0 \times (+\infty) := 0$ としておく.

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_1((A+x)\cap B)dx = \mu_1(A)\mu_1(B).$$

(2) $(\star)$ $\mu_1(A) > 0,\ \mu_1(B) > 0$ のとき $\mu_1((A+r)\cap B) > 0$ となる $r \in \mathbb{Q}$ が存在することを示せ.

$\boxed{94}$ $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を有界変動函数とする. $x \in [a,b]$ および $[a,x]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$ について $P_{f,\Delta}(x)$, $N_{f,\Delta}(x)$ および $V_{f,\Delta}(x)$ を以下で定義する.

$$\begin{aligned} P_{f,\Delta}(x) &:= \sum_{f(x_i)>f(x_{i-1})} (f(x_i) - f(x_{i-1})), \\ N_{f,\Delta}(x) &:= -\sum_{f(x_i)<f(x_{i-1})} (f(x_i) - f(x_{i-1})), \\ V_{f,\Delta}(x) &:= P_{f,\Delta}(x) + N_{f,\Delta}(x). \end{aligned}$$

ただし, 和の項数が 0 個のときは 0 とする. さらに $[a,b]$ 上の函数 P_f, N_f および V_f を $P_f(x) := \sup_{\Delta} P_{f,\Delta}(x)$, $N_f(x) := \sup_{\Delta} N_{f,\Delta}(x)$, $V_f(x) := \sup_{\Delta} V_{f,\Delta}(x)$ $(x \in [a,b])$ とする. このとき P_f, N_f および V_f は単調増加であり, $P_f(x)+N_f(x) = V_f(x)$, $P_f(x)-N_f(x) = f(x) - f(a)$ $(a < x \le b)$ となることを示せ.

$\boxed{95}$ $(\star)$ a, b を $a < b$ なる実数とする. このとき, $[a,b]$ 上の有界変動函数はほとんど至るところ微分可能であることを示せ.

$\boxed{96}$ (1) f を $[a,b]$ 上の有界な単調増加函数とする. このとき f' は Lebesgue 可積分であり $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx \le f(b) - f(a)$ が成り立つことを示せ.
(2) (1) において, 等号が成り立たないような連続函数 f の例を 1 つ与えよ.

$\boxed{97}$ (1) $a < b$ とし, g を $[a,b]$ 上の Lebesgue 可積分函数, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(x) := \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ $(x \in [a,b])$ とする. このとき f は $[a,b]$ 上有界変動であることを示せ.

(2) f は $[a,b]$ 上の函数として絶対連続であることを示せ.

(3) $f' = g$ a.e. であることを示せ.

$\boxed{98}$ $(\star)$ $a > 0$ とし, $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ を左連続な有界変動函数とする. このとき, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f(x)\frac{\sin nx}{x}dx = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to+0} f(x).$$

$\boxed{99}$ f を周期 2π の函数で

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2} & (0 \le x < \pi \text{のとき}) \\ \dfrac{-\pi - x}{2} & (-\pi \le x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満たしているものとする．$\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.8519 > \frac{\pi}{2}$ は既知として，次のことを証明せよ．ただし，次の記号を用いること．

$$S_N[f](x) = \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)\,dx\right)\exp(ikx),\ D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N}\exp(ikx)$$

(1) $S_N[f](x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x (D_N(t) - 1)\,dt$ が成り立つ．

(2) $\displaystyle\int_0^x D_n(t)\,dt - 2\int_0^x \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$ は $n \to \infty$ のときに，$0 \le x \le \pi$ に関して一様に 0 に収束する．

(3) $\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N[f]\left(\frac{\pi}{N}\right) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t}\,dt \approx 1.8519$. この現象を Gibbs 現象という．

○ 記号：$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を torus と呼ぶ．$\mathbb{T}$ は位相構造と群構造を自然に入れておく．さらに，Lebesgue 測度から決まる自然な測度を入れて $\mathbb{T}$ は全測度 2π の測度空間とする．$\mathbb{T}$ 上の函数は $\mathbb{R}$ 上の函数で周期が 2π のものと同一視することがある．

○ 記号：$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とおく．

$\boxed{100}$ $G \subset \mathbb{C}^*$ を部分群とする．また，G には $\mathbb{C}^*$ から誘導される位相を入れておく．

(1) G が compact なら $G \subset S^1$ であることを示せ．

(2) G が S^1 に含まれる無限群であるなら，G は稠密であることを示せ．

(3) S^1 に含まれる compact 群の構造を決定せよ．

(4) 実数 α を 2π で割ると有理数にならないようなものとする．このとき，S^1 の部分集合 $E = \{e^{ik\alpha} : k \in \mathbb{Z}\}$ は S^1 で稠密であることを示せ．

○ 定義：自然数 n に対して，$D_n(t) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} e^{ijt}$ とおき，これを Dirichlet 核という．$\mathbb{T}$ 上の可積分函数 f に対して，$S_n(f,t) = \dfrac{1}{2\pi}D_n * f(t)$ とおく．また，$K_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n} D_j(t)$ とおき，これを Fejer 核という．$\mathbb{T}$ 上の可積分函数 f に対して，$\sigma_n(f,t) = \dfrac{1}{2\pi}K_n * f(t)$ とおく．

$\boxed{101}$ $\{a_j\}_{j=-n}^{n}$ を有限複素数列とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(t) = \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}$ に対して，$S_n(f,t)$ を計算せよ．

(2) 不等式 $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\sum_{j=-n}^{n} j a_j\, e^{ijt}\right| \le 2n \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\sum_{j=-n}^{n} a_j\, e^{ijt}\right|$ を証明せよ．

○ 記号：$f \in L^1(\mathbb{T})$ に対して，$\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ とおく．

$\boxed{102}$ $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ が $|\hat{f}(n)| \le K|n|^{-1}$ を満たしているとする．

(1) 恒等式 $S_n(f,t) = \sigma_n(f,t) + \displaystyle\sum_{j=-n}^{n} \frac{|j|\hat{f}(j)}{n+1} e^{ijt}$ を用いて，$|S_n(f,t)| \le \|f\|_\infty + 2K$ を示せ．

(2) $f(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < \pi) \\ t - 2\pi & (\pi \le t < 2\pi) \end{cases}$ の Fourier 級数展開を求めよ．

(3) $\displaystyle\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\sin jt}{j}\right| \le \frac{\pi}{2} + 1$ を示せ．

$\boxed{103}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ を既知として，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_{L^2(\mathbb{T})}$, $f \in C^1(\mathbb{T})$ を示せ．

$\boxed{104}$ (Olivier の定理) $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を単調減少する数列で，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ を満たしているとする．

(1) $a_j = \displaystyle\sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1})$ であることを用いて，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\lim_{j\to\infty} j a_j = 0$ を証明せよ．

$\boxed{105}$ $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は次の条件 (i) $a_j = a_{-j}$, (ii) $a_{j+1} + a_{j-1} \ge 2a_j$, (iii) $a_j \ge 0$ を満たしている 0 に収束する実数列とする．また，$f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)K_{n-1}(t)$ とおく．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) < \infty$ を示せ．

(2) $\hat{f}(n) = a_{|n|}$ を示せ．

(3) $n \ge 2$ のときに，$\hat{f}(n) = \dfrac{1}{\log|n|}$ となる $f \in L^1(\mathbb{T})$ が存在することを示せ．

(4) $1 \le p < \infty$ とする．$g \in L^p(\mathbb{T})$ に対して，数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，$a_n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge 2^n$, $a_{n+1} \ge a_n$, $\|\sigma_{a_n}(g) - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \le 2^{-n}$ となるようにとる．このと

き，$f = g + \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} (g - \sigma_{a_n}(g))$ とおくと，$f \in L^p(\mathbb{T})$ であることを示せ．また，$\hat{f}(n)$ と $\hat{g}(n)$ の関係を調べよ．

(5) $(\star)$ $1 \le p < \infty$ とする．任意の $g \in L^p(\mathbb{T})$ は $g = h_1 * h_2$, $h_1 \in L^1(\mathbb{T})$, $h_2 \in L^p(\mathbb{T})$ なる分解が可能であることを示せ．

$\boxed{106}$ Fourier 級数を用いて，熱方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ を初期条件，境界条件 $u(0,x) = x(\pi - x)$, $0 \le x \le \pi$, $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, $t \ge 0$ の下で解け．

◯ 定義：函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ および Fourier 逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi}\, dx$$

とおく．

$\boxed{107}$ $0 < a < b$ とする．Fourier 変換を用いて，積分方程式 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(y)\, dy}{(x-y)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2}$ を解け．ただし，$\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ となる解を求めること．

$\boxed{108}$ $L^2[-1,1]$ における $1, x, x^2, \cdots$ を Gram-Schmidt の直交化法で直交化したものを $e_0(x)$, $e_1(x), \cdots$ と表す．$n = 0, 1, \cdots$ に対して，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$ とおくと，$e_n(x) = \sqrt{n + \dfrac{1}{2}} P_n(x)$ であることを示せ．

$\boxed{109}$ (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測函数とする．任意の ξ に対して $|f(x)| e^{|\xi x| - x^2} \in L^1(\mathbb{R}_x)$ であるとする．任意の多項式函数 $P(x)$ に対して，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) P(x) e^{-x^2}\, dx = 0$ が成り立つなら，$f(x) = 0$, $a.e. x \in \mathbb{R}$ であることを証明せよ．

(2) $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$ とする．$(0, \infty)$ 上の測度 $d\mu(x) = x^k e^{-x}\, dx$ を考える．多項式函数全体のなす集合 $\mathcal{P} = \mathrm{span}\{1, x, x^2, \cdots\}$ は $L^2((0,\infty), d\mu)$ で稠密であることを示せ．

(3) μ を (2) と同じものとする．$L^2((0,\infty), d\mu)$ において，$1, x, x^2, \cdots$ を Gram-Schmidt の直交化法で直交化したものを $e_0(x), e_1(x), e_2(x), \cdots$ とおく．$n = 0, 1, \cdots$ に対して $L_n^k(x) = \dfrac{x^{-k} e^x}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^{k+n} e^{-x})$ とおく．このとき，$e_n(x) = (-1)^n \sqrt{\dfrac{n!}{(n+k+1)!}} L_n^k(x)$ であることを証明せよ．

$\boxed{110}$ $f \in L^1(\mathbb{R})$ とする．$\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $\mathrm{supp}(\mathcal{F}f) \subset [0, \infty)$ とする．このとき，f は $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ で正則，$\mathbb{H}^{\mathrm{cl}}$ で連続な函数に拡張されることを示せ．

○ 定義: α, β を非負整数とする. C^∞ 級函数 $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して $\varphi_{(\alpha,\beta)}(x) := x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)$ と一時的におくことにする. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は以下で定義される函数の集合である.

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})\,;\ \text{すべての非負整数}\alpha, \beta\text{に対して}\varphi_{(\alpha,\beta)} \in L^\infty(\mathbb{R})\right\}.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の元を急減少函数と呼ぶ. α, β を非負整数とするとき, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して, $|\varphi|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_{(\alpha,\beta)}(x)|$ とおく. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ には, 任意の元 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $U(\varphi; \alpha, \beta, \varepsilon) := \{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,;\, |\psi - \varphi|_{(\alpha,\beta)} < \varepsilon\}$ (α, β は非負整数, $\varepsilon > 0$) なる部分集合の有限個の共通部分全体を φ の基本近傍系とする位相を入れる.

○ 定義: $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ から $\mathbb{C}$ への連続複素線型写像の集まりである. 即ち, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) := \{f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}\,;\, \langle f, \varphi + \psi\rangle = \langle f, \varphi\rangle + \langle f, \psi\rangle,\ \langle f, a\cdot\varphi\rangle = a\cdot\langle f, \varphi\rangle,\ f \text{ は連続}\}$ と定義する. f の φ における値は慣習として $\langle f, \varphi\rangle$ と表す. $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の元を緩増加超函数と呼ぶ. $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の位相は, すべての $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して coupling $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$ が連続になる最小の位相とする.

$\boxed{111}$ $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の位相で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta$ を示せ.

○ 定義: $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の Fourier 変換 $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ を $\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle := \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ と定義する. Fourier 変換 $\mathcal{F}$ を $L^2(\mathbb{R})$ に制限すると, $L^2(\mathbb{R})$-等長写像になる.

$\boxed{112}$ 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x+i}$ の Fourier 変換を計算せよ.

$\boxed{113}$ (1) $k_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x+i\varepsilon} - \dfrac{1}{x-i\varepsilon}$ の Fourier 変換を求めよ.
(2) $k = \displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0} k_\varepsilon$ を $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ の位相における極限として求めよ.

$\boxed{114}$ $\mathbb{R}^2$ における $f(x) = |x|^{-1}$ の超函数としての Fourier 変換を計算せよ.

$\boxed{115}$ 次の函数の Fourier 変換を求めよ.
(1) $f_1(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.
(2) $f_2(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

$\boxed{116}$ (1) $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ の Fourier 変換を求めよ.
(2) ($\star$) $f_2(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ の Fourier 変換を求めよ.
(3) 積分 $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x(e^x + e^{-x})}\, dx$ を求めよ.

◯ 記号: 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の可測函数 f に対し, 以下のものを定義する.

$$
\begin{aligned}
||f||_p &:= \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{ただし } p > 0, \\
||f||_\infty &:= \inf\{\alpha \geq 0 \, ; \, \mu(\{x \in X \, ; \, |f(x)| > \alpha\}) = 0\}.
\end{aligned}
$$

明らかに $f = g$ a.e. ならば $||f||_p = ||g||_p \, (0 < p \leq \infty)$ であり, 特に $f = 0$ a.e. ならば $||f||_p = 0$ である. ここで, X 上の可測函数 f, g について, $f = g$ a.e. のとき同値であるということとし, f を含む同値類を $[f]$ で表し, 次のものを考える.

$$
L^p(X) = L^p(X, d\mu) := \{[f] \, ; \, f \text{ は } X \text{ 上可測}, \, ||f||_p < +\infty\}, \quad 0 < p \leq +\infty.
$$

この定義は $[f]$ の代表元のとり方に依らない. 以下, $L^p(X)$ の元の代表元のとり方に依らない性質を扱うとき, しばしば $[f]$ と f を同一視する.

$\boxed{117}$ $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間, p を $1 < p < \infty$ なる実数とし, q を $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす実数とする; $q = \dfrac{p}{p-1}$.

(1) 非負実数 a, b に対して $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ を示せ.

(2) $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$ に対して次の不等式を示せ (Hölder の不等式).

$$
\left| \int_X f(x) g(x) d\mu(x) \right| \leq ||f||_p ||g||_q.
$$

(3) $f, g \in L^p(X)$ に対して $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ を示せ (Minkowski の不等式).

$\boxed{118}$ (1) norm 空間 $(V, ||\cdot||)$ が Banach 空間であるためには $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$ なる任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in V$ が存在することが必要十分であることを示せ.

(2) 測度空間 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ および $1 \leq p < +\infty$ なる実数 p について, $L^p(X)$ は Banach 空間であることを示せ.

$\boxed{119}$ (1) $(V, \|\cdot\|_V)$ を norm 空間とし, W を V の閉部分 vector 空間とする. V/W の任意の元 $\overline{x} := x + W \, (x \in V)$ に対して $\|\overline{x}\|_{V/W}$ を以下で定義する.

$$
\|\overline{x}\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|x + w\|_V.
$$

このとき $(V/W, \|\cdot\|_{V/W})$ は norm 空間であることを示せ.

(2) さらに $(V, \|\cdot\|_V)$ が Banach 空間ならば $(V/W, \|\cdot\|_{V/W})$ も Banach 空間であることを示せ.

$\boxed{120}$ $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間, p を $0 < p < 1$ なる実数とする．いま $f, g \in L^p(X)$ に対して $d(f, g) := ||f - g||_p^p$ とする．このとき $(L^p(X), d)$ は完備距離空間であることを示せ.

$\boxed{121}$ (1) 有限次元 norm 空間 V から norm 空間 W への任意の線型作用素は連続であることを示せ.

(2) $(\star)$ 任意の無限次元 norm 空間 V に対して, 連続でない線型汎函数 $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在することを示せ.

(3) norm 空間 V の余次元 1 の部分 vector 空間 W が閉部分空間であるためには, 0 でない連続線型汎函数 $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在して $W = \ker f$ となることが必要十分であることを示せ.

$\boxed{122}$ (1) V を norm 空間, W_1 を V の閉部分 vector 空間, W_2 を V の有限次元部分 vector 空間とする．このとき, $W_1 + W_2$ は V の閉部分空間であることを示せ.

(2) $(\star)$ norm 空間 V および V の閉部分 vector 空間 W_1, W_2 で, $W_1 + W_2$ が V の閉部分空間とならないような例を 1 つ与えよ.

◯ 記号: 以下において, 複素内積空間 H 上の内積 $(\cdot, \cdot)$ は第 1 成分について $\mathbb{C}$-線型, 第 2 成分について $\mathbb{C}$-反線型とする.

$\boxed{123}$ (1) $(V, ||\cdot||)$ を norm 空間とする．いま, 任意の $x, y \in V$ について平行四辺形の法則 $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ が成り立つとする．このとき, V 上は次の内積 $(\cdot, \cdot)$ で与えられる内積空間であることを示せ.

$$(x, y) := \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k ||x + i^k y||^2, \quad x, y \in V.$$

(2) $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を測度空間とする．いま p を $p \geq 1$ なる実数または ∞ とする．このとき, $(L^p(X), ||\cdot||_p)$ が Hilbert 空間となるのは, $p = 2$ または $L^p(X)$ の次元が 1 以下のとき, かつそのときに限ることを示せ.

$\boxed{124}$ H を Hilbert 空間とし, $(\cdot, \cdot)$ を H 上の内積とする．いま H の任意の部分集合 S について直交補空間 $S^\perp$ を次で定義する.

$$S^\perp := \{x \in H\, ; \text{任意の } y \in S \text{ に対して } (x, y) = 0\}.$$

(1) $S \subset H$ を閉凸部分集合とする．このとき, 任意の $x \in H$ に対してある $y \in S$ で $||x - y|| = d(\{x\}, S)$ が成り立つものがただ 1 つ存在することを示せ.

(2) 閉部分 vector 空間 $V \subset H$ について $H = V \oplus V^\perp$ (直交直和) を示せ.

$\boxed{125}$ (1) すべての Hilbert 空間 H に対して, 正規直交基底が存在することを示せ.

(2) H の正規直交基底 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を 1 つとる. このとき, 任意の $x \in H$ について集合 $\{\lambda \in \Lambda\,;\, (x, x_\lambda) \neq 0\}$ は高々可算であることを示せ.

(3) $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x, x_\lambda)|^2$ および $x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, x_\lambda)x_\lambda$ を示せ.

$\boxed{126}$ ($\star$) $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を σ-有限な測度空間, f を X 上の可測函数とし, $1 \le q < p < \infty$ とする. 任意の $g \in L^p(X)$ に対して $fg \in L^q(X)$ ならば $f \in L^r(X)$, ただし $r = \dfrac{pq}{p-q}$ であることを示せ.

$\boxed{127}$ V を Banach 空間とし, W_1, W_2 を閉部分 vector 空間で $V = W_1 \oplus W_2$ (代数的直和) となっているとする. $T : V \longrightarrow W_1$ を $x \in V$ に対して $x = y + z\,(y \in W_1,\ z \in W_2)$ となる y を対応させる写像とする. このとき, T は連続線型作用素であることを示せ.

$\boxed{128}$ 実数列からなる数列空間 l^∞, l を以下で定義する.

$$l^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty\,;\, \|x\|_\infty := \sup_{n\ge1}|x_n| < +\infty\},$$
$$l = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty\,;\, \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \text{ が存在 }\}.$$

(1) l は l^∞ の閉部分空間であることを示せ.

(2) l^∞ 上の実線型汎函数 f で, $\liminf_{n\to\infty} x_n \le f(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$ が成り立つものが存在することを示せ.

$\boxed{129}$ V を norm 空間とし, V^* を V の共役空間とする. このとき, V^* が可分ならば V も可分であることを示せ.

◯ 定義: V を norm 空間とし, V^* を V の共役空間とする. V^* の汎弱位相とは, V^* の任意の元 f に対して $B(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{g \in V^*\,;\, |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \text{ for any } i = 1, \ldots, n\}$ (n は正整数, $x_1, \ldots, x_n \in V,\ \varepsilon > 0$) なる部分集合からなる基本近傍系を与える位相である. V^* の点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が汎弱位相について $f \in V^*$ に収束するとき $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が f に汎弱収束するという.

$\boxed{130}$ ($\star$) V を norm 空間, V^* を V の共役空間とし, $B_1^* := \{f \in V^*\,;\, \|f\| \le 1\}$ とする.

(1) B_1^* は汎弱位相について compact であることを示せ (Banach-Alaoglu の定理).

(2) さらに V が可分ならば, B_1^* に適当な距離を入れることにより, その距離から得られる位相が汎弱位相と一致することを示せ.

$\boxed{131}$ m, n を非負整数で $m > n$ なるものとし，$V = C^m([0,1])$, $W = C^n([0,1])$ とするとき，$F : V \ni f \mapsto f \in W$ は compact 作用素であることを示せ．ただし，$C^n([0,1])$ 上の norm は $\|f\| = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|_\infty$ $(f \in C^n([0,1]))$ とする．

$\boxed{132}$ $V = C([a,b])\,(a < b)$ とし，$T : V \longrightarrow V$ を $Tf(x) := \displaystyle\int_a^x f(y)dy\,(f \in V)$ とする．

(1) T は compact 作用素であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$ を示せ．

(3) T は固有値をもたないことを示せ．

○ 記号：norm 空間 V に対して，$B(V) := \{T : V \longrightarrow V\,;\,$ 線型, 有界 $\}$ とする．

○ 定義：Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素 $T \in B(H)$ についてすべての $x, y \in H$ に対して $(Tx, y) = (X, Sy)$ が成り立つ H 上の有界線型作用素 S を T の共役作用素と呼び，$S = T^*$ と表す．H 上の有界線型作用素 $T \in B(H)$ が自己共役であるとは，$T^* = T$ が成り立つことである．

$\boxed{133}$ H を Hilbert 空間とする．

(1) $T \in B(H)$ について $\|T\| = \displaystyle\sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} |(Tx, y)|$ を示せ．

(2) $T \in B(H)$ を自己共役作用素とする．このとき，任意の $x, y \in H$ に対して $\mathrm{Re}(Tx, y) = \dfrac{1}{4}((T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y))$ が成り立つことを示せ．

(3) H 上の自己共役作用素 $T \in B(H)$ について，$\|T\| = \displaystyle\sup_{\|x\|\le 1} |(Tx, x)|$ を示せ．

○ 定義：H を複素 Hilbert 空間とする．$T \in B(H)$ が正であるとは，すべての $x \in H$ に対して $(Tx, x) \ge 0$ となることである．

$\boxed{134}$ (1) T, T' を複素 Hilbert 空間 H 上の有界正作用素とする．このとき，$T + T' = 0$ ならば $T = T' = 0$ であることを示せ．

(2) S, S' を複素 Hilbert 空間 H 上の有界正作用素で，$SS' = S'S$ かつ $S^2 = S'^2$ が成り立つとする．このとき，$S = S'$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{135}$ (1) 級数 $(1+x)^{1/2} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ は周を含めた収束円 $D^{\mathrm{cl}} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le 1\}$ 上で一様に絶対収束することを示せ．

(2) $(\star)$ H を複素 Hilbert 空間とし，$T \in B(H)$ を正作用素とする．このとき，$S^2 = T$ となる正作用素 $S \in B(H)$ がただ 1 つ存在することを示せ．