幾何の離散群への応用
- 群のCAT(0)次元 -

藤原 耕二 (東北大学 数学)
fujiwara@math.tohoku.ac.jp
http://www.math.tohoku.ac.jp/~fujiwara/
トポロジーシンポジウム（松本）
2003年7月19日～22日
(講演後、2003年8月に一部修正した）

1 イントロダクション

離散群（ここでは有限生成とする）の研究課題、方法、動機付けは色々あるが、ここでは"幾何学的"に考えたい。具体的には群 G がある距離空間 X に等長的に作用する状況を考える。例を挙げると

- 多様体 M の基本群 G の普遍被覆空間 X への作用。多様体に計量を与えれば作用は等長的になる。
- 我々はsingularな空間も許容する。有限生成群 G にある生成元集合を定めると、「Cayleyグラフ」と呼ばれる局所有限なグラフが定まり、その上の自然な距離（「語距離」）について G は等長的に作用する。

一方、位相的な観点からの古典的な問題意識として、離散群 G が与えられたとき、それを基本群に持つ空間 X を考える（または探す）のは自然である。さらに X がasphericalであること（すなわち普遍被覆が可縮）を要請するのもリーズナブルである。実際、そのような空間はCW複体として常に存在しホモトピーを除いて一意であることが古くから知られている。従って群 G の（コ）ホモロジーを X の（コ）ホモロジーと定義することができる。X は「$K(G,1)$ 空間」と呼ばれるが、群 G の不変量と

して $K(G,1)$ 複体の最小次元を考え、それを「geometric dimension」と呼び geom $\dim(G)$ とかく。明かに群 G のコホモロジーは geom $\dim(G)$ を越えると消えるが、geom dim は有限とは限らない ([Br])。

ところで一般的な問題として、単連結な空間 X が可縮であるかを判定するのは容易ではない。すなわち、空間 X がある仕方で与えられて、その全体の形が一目で見て取れない状況である。そのような問題に対する一般的で強力な道具（の 1 つ）は Morse 理論だろう。

1 つの例として、曲面（2 次元コンパクト多様体）の Teichmuller 空間を考えよう。Teichmuller 空間 T は、あるモジュライ空間の普遍被覆として与えられるので単連結である。T には曲面の写像類群（有限表示群）が作用するので我々の設定に当てはまる。実際、T は有限次元のユークリッド空間に位相同型であることが知られていて特に可縮である。しかし T が可縮であることを直接示すのは容易ではない。

そもそもユークリッド空間は、なぜ可縮なのだろうか？　Morse 理論の立場に立てば、ユークリッド空間のある基点からの距離関数 f には特異点がないからと言うことが出きる。すなわち、f のグラジエントベクトルに沿って空間を基点につぶせばよい。本質的に同じ例として次の Cartan-Hadamard 定理がある。「完備な n 次元リーマン多様体 M の断面曲率が ≤ 0 なら、その普遍被覆は n 次元ユークリッド空間に微分同型であり特に可縮」。この場合、明かに M の基本群の geom dim は $\leq n$ である。

以上のことから次のような問題を考えたい。

群 G に対して、$K(G,1)$ 空間 X で"曲率が ≤ 0" であるものを見つけよ。またその最小次元（不変量）は何か？

我々は singular な空間も許容するから、X はリーマン多様体とは限らない。よって曲率 ≤ 0 を一般化した概念、「CAT(0)」を次章で導入し、それに対して上のように決まる不変量を「CAT(0) 次元」と呼ぶ。定義より geom dim $\leq$CAT(0) 次元である。

2　CAT(k) 空間

この章では CAT(k) 空間の定義と例、基本的な性質を [Ba],[BriH] から述べる。このノートでは距離空間における 2 点間の距離を $|x-y|$ と表す事がある。

2.1 定義と例

距離空間 X の任意の 2 点間の距離が 2 点を結ぶ X 内のある道の長さで実現されるとき、X を「測地空間」という。距離を実現する道を「測地線」という。たとえばリーマン多様体は測地空間である。

リーマン多様体にはリーマン計量から定まる（断面）曲率があるが、一般の測地空間に「モデル空間」との比較によって"曲率"を定義する。ここでは、モデル空間 $M(k)$ として 2 次元の完備、単連結なリーマン多様体で、その断面曲率が $k = 0, 1, -1$ であるものを考える。すなわち、ユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$、2 次元球面 $\mathbf{S}^2$、双曲平面 $\mathbf{H}^2$ である。

測地空間 X の測地三角形（すなわち三辺が全て測地線）Δ に対して、モデル空間内の測地三角形で、その三辺の長さが Δ の三辺と同じものを「比較三角形」と呼び $\bar{\Delta}$ と書く。ただし、モデルが $\mathbf{S}^2$ の時は Δ の三辺の長さの合計が 2π 未満の場合だけ比較三角形を考える。Δ の 3 頂点を p, q, r とし、対応する $\bar{\Delta}$ の頂点を $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ と書く。Δ の辺上の点 x に対応する $\bar{\Delta}$ の点を $\bar{x}$ と書く。ここで対応する点とは、x を含む辺が頂点 p, q を結ぶ測地線 $[p, q]$ であるとき、モデル空間の $\bar{p}, \bar{q}$ を結ぶ測地線 $[\bar{p}, \bar{q}]$（これは $\bar{\Delta}$ の辺である）上の点で、$|p - x| = |\bar{p} - \bar{x}|$ を満たす点 $\bar{x}$ のことである。

定数 k を固定して X について次が成り立つとき X は「CAT(k) 空間」と言う。CAT は Cartan,Alexandrov,Toponogov の頭文字である。

X の任意の測地三角形 Δ の周上の任意の 2 点 x, y と、$M(k)$ 内の比較三角形上の対応する 2 点 $\bar{x}, \bar{y}$ について

$$|x - y| \leq |\bar{x} - \bar{y}|.$$

明らかに CAT(-1) 空間は CAT(0) 空間であり、CAT(0) 空間は CAT(1) 空間である。

例。(i) CAT(1) 空間：$\mathbf{S}^n, (n > 0)$. $\mathbf{S}^n$ の中の凸集合。二つの $\mathbf{S}^2$ を赤道で貼り合わせたもの。

(ii) CAT(0) 空間：$\mathbf{E}^n$. 断面曲率 ≤ 0 の完備、単連結なリーマン多様体。Euclidean ビルディング。次の 2 つの操作で得られる空間 (1) 2 つの CAT(0) 空間のプロダクト。(2) 2 つの CAT(0) 空間 X, Y の完備凸集合 $A \subset X, B \subset Y$ が等長的であるとき、X, Y を A, B で貼り合わせたもの。特に、A, B が無限測地線の場合など。

(iii) CAT(-1) 空間：$\mathbf{H}^n, (n > 0)$. 断面曲率 ≤ -1 の完備、単連結なリーマン多様体。単体的、または $\mathbf{R}$ ツリー。

次の結果はイントロで述べた問題設定を裏付ける意味でも重要である。

定理 2.1 X を *CAT(0)* 空間とする。任意の *2* 点 $x, y \in X$ を結ぶ測地線はただ *1* つで（$[x, y]$ とかく）、端点 x, y に連続に依存する。特に X は可縮。

比較空間 $\mathbf{E}^2$ において測地線の一意性と連続性は自明だが、比較三角形を使っての簡単な考察から X においても成立することが分かる。可縮性は基点 x を決めて、任意の点 $y \in X$ は測地線 $[x, y]$ に沿って縮めてくればよい。

2.2 CAT(0) 空間の等長変換の分類

CAT(0) 空間について考えるとき、その代表的かつ極端な例であるユークリッド平面、双曲平面、ツリーを頭に置いておくのは助けになる。

完備な CAT(0) 空間 X の等長変換 $f : X \to X$ の分類について述べる。

- f が固定点を持つとき、「エリプティック」という。固定点の集合は凸である（すなわち任意の 2 点が内部で測地線により結ばれる）
- f がエリプティックでなく、不変な無限測地線 γ を持つとき、「ハイパボリック」という。γ を f の「軸」という。軸は唯 1 つとは限らないが軸の集合は凸集合で $A \times \gamma$ に等長的。各 $a \times \gamma$ は軸である。特に 2 つの軸は互いに”平行”である。
- f がエリプティックでもハイパボリックでもないとき、「パラボリック」と呼ぶ。

f について、その「移動距離」 $t(f)$ を次で定義する。

$$t(f) = \inf_{x \in X} |x - f(x)|.$$

上の分類は次のように言い換えられる。

- $t(f) = 0$ で、ある点 x で移動距離 (=0) が実現される（すなわち固定点）ときエリプティック
- $t(f) > 0$ で、ある点 x で移動距離 $t(f)$ が実現されるときハイパボリック
- $t(f)$ を実現する点が存在しないときパラボリックである。さらに、$t(f) = 0$ のとき、strictly パラボリックと言うときがある。

さらに、ハイパボリックの時、移動距離を実現する x は軸上にあり、それに限る。すなわち $A \times \gamma = \{x \in X : |x - f(x)| = t(f)\}$。

もちろん、この分類は CAT(-1) 空間にも適用できる。この場合、さらにハイパボリックな等長変換の軸は唯 1 つである。これは双曲空間 $\mathbf{H}^n$ の等長変換の通常の分類の拡張になっている。

エリプティックまたはハイパボリックな等長変換を、「セミシンプル」と呼ぶ。ユークリッド平面、ツリーの等長変換は全てセミシンプルである。

一般に距離空間 X に群 G が等長的に作用しているとき、任意の $x \in X$ と任意の $r > 0$ について、集合 $\{g \in G : |x - g(x)| \le r\} \subset G$ が有限集合のとき、作用は「不連続的」という。次の事実は基本的である。

定理 2.2 *CAT(0)* 空間 X に群 G が等長的に作用しているとする。作用は不連続的とする。このとき、$g \in G$ がトージョンであることと、エリプテックであることは同値。さらに、商空間 X/G がコンパクトなら G の各元はセミシンプル。

従って、X/G がコンパクトで G にトージョンがなければ、単位元以外はハイパボリックである。

定理 2.3 (Flat torus theorem) *CAT(0)* 空間 X に階数 n の自由アーベル群 G が等長的、不連続的に作用しているとする。各元はセミシンプルとする。このとき、n 次ユークリッド空間と等長的、G-不変で凸な部分空間 $\mathbf{E}^n \subset X$ が存在し、$\mathbf{E}^n/G$ は n 次元トーラスである。

この結果は X がリーマン多様体で断面曲率が ≤ 0 のとき、Lawson-Yau の定理として古くから知られているが、それは次のように述べることも出きる。「断面曲率 ≤ 0 の閉じたリーマン多様体 M において、その基本群が $\mathbf{Z}^n$ を含むことと、M が測地的な n 次元 flat トーラスを含むことは同値」。

3　群の CAT(0) 次元

以下、断らない限り、簡単のため群 G にトージョンはないとする。イントロダクションで述べたように、群 G と CAT(0) 幾何との関連を考えよう。まず、G が等長変換で不連続的に作用する完備 CAT(0) 空間 X の最小次元を「CAT(0) 次元」と呼び、CAT(0)-dim(G) と書く。X/G は $K(G,1)$

空間である（G にトージョンがないので、作用の不連続性より、作用は自由）。

上で G の X への作用はセミシンプルとは限らない。一般にセミシンプルな変換は軸や固定点の存在、Flat torus 定理など手がかりが多い。ということで上の CAT(0) 次元の定義に更に作用がセミシンプルという条件も加えて、そのような G の作用を許す X の最小次元を CAT(0)-dim$_{ss}(G)$ と書くことにする。空間 X の次元は topological 次元、Hausdorff 次元など適当に考える。

G にトージョンがないので、geom dim $\leq$ CAT(0)-dim $\leq$ CAT(0)-dim$_{ss}$ である。例えば、$\mathbf{Z}^n$ では、どれも n で等号が成立している。自由群については全て 1 である。我々は、むしろ等号が成立しないような G に興味がある。まず、次のような例を考えよう。

$$G =< a, b | aba^{-1} = b^2 > .$$

これは Solvable な群で、Baumslag-Solitar 群と呼ばれる群の一例である。この G について geom dim =2 は容易に確かめられる。一方、G は完備な CAT(0) 空間にセミシンプルな等長変換では作用しない。このような場合 CAT(0)-dim$_{ss} = \infty$ とする。実際、セミシンプルな作用があったとしよう。一般に x がセミシンプルなら、

$$t(yxy^{-1}) = t(x), t(x^n) = n \cdot t(x)$$

であるから、$t(b) = t(b^2) = 2t(b)$. よって $t(b) = 0$。よって b はエリプティック。しかし、b はトージョンでないことが知られている。これは作用の不連続性に矛盾。

3.1 Artin 群についての Brady-Crisp の定理

CAT(0)-dim$_{ss}$ が geom dim より 1 だけ大きくなる群 G の例を 2 つ挙げる。まず Brady-Crisp の論文 [BC] からの結果を紹介する。$A(m, n, p)$ は次の表示で与えられる有限表示群で、「Artin 群」と呼ばれる群の例である。

$$A(m, n, p) =< a, b, c | (a, b)_m = (b, a)_m, (b, c)_n = (c, b)_n, (a, c)_p = (c, a)_p >$$

ここで $(a, b)_m$ は、a で始まり a, b が交互に現れる長さ m の語とする．例えば $(a, b)_3 = aba$. $1/m + 1/n + 1/p \leq 1$ が成り立つなら、$A(m, n, p)$ は２次元の有限な $K(A, 1)$-complex を持つ事が知られていて ([CD])、geom dim(A)=2 である。

定理 3.1 (Brady-Crisp) $m, n \geq 3$ を奇数整数とし、$A = A(m, n, 2)$ とする。

(1) A は完備な 2 次元の CAT(0) 空間にセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用できない。

(2) 有限個の例外を除いて、任意の A に、ある 3 次元のプロパーな *CAT(0)* 空間 X が存在し、A はセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用し、X/A はコンパクト。

つまり無限個の A について、CAT(0)-dim$_{ss}$=3 で、geom dim=2 と 1 の差がある。CAT(0)-dim については不明である。すなわち上の定理 (1) で「セミシンプル」の仮定を除いて結論が成り立つかはわからない。

証明の概略は次のようである。$A(m, n, p)$ がセミシンプルに 2 次元 CAT(0) 空間 X に作用するとして矛盾を導く。まず、

$$A(m) =< a, b | (a, b)_m = (b, a)_m >$$

と定義する。$A(m)$ は $A(m, n, p)$ の部分群になることが知られている。$A(2) = \mathbf{Z}^2$ である。$m > 2$ のときは、中心 Z を考える。$\Delta = (a, b)_m$ と置く。このとき

- m が奇数なら、$Z =< \Delta^2 >$.
- m が偶数なら、$Z =< \Delta >$.

以下、$z_{a,b}$ を $A(m)$ の中心 Z の生成元とする。すなわち、Δ^2 または Δ である。二つの部分群 $< a, z_{a,b} >, < b, z_{a,b} >$ は、$\mathbf{Z}^2$ に同型になる。

次に $A(m, n, 2)$ の中に次の 5 つの部分群を考える。

$$< a, z_{a,b} >, < b, z_{a,b} >, < b, z_{b,c} >, < c, z_{b,c} >, < a, c > .$$

これらは全て $\mathbf{Z}^2$ に同型であり、よって Flat torus 定理により空間 X の中に、５つの部分群に対応する不変な平面が５つ存在する。これらは、ある特定の仕方で配置している。すなわち、1 番目の平面と２番目の平面は $z_{a,b}$ の軸、２番目と３番目は b の軸というように、隣同士の 2 つの平面（５番目と１番目も）は、あるハイパボリック変換の軸の直線を共有し、全体としてチェインのようになっている。一方 X は 2 次元で単連結であることと合わせて矛盾が導かれる。

3.2 Bridsonの例

次にBridsonの論文[Bri]からの結果を紹介する。次のような有限表示群を考える。

$$G = \{a, b, \gamma, s, t | \gamma a \gamma^{-1} = a^{-1}, \gamma b \gamma^{-1} = b^{-1}, sas^{-1} = [a, b] = tbt^{-1}\}.$$

定理 3.2 (Bridson) *(1) geom dim (G)=2.*

(2) G は完備な2次元のCAT(0)空間にセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用できない。

(3) ある3次元のプロパーなCAT(0)空間 X が存在し、G はセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用し、X/G はコンパクト。

従ってCAT(0)-dim$_{ss}$=3、geom dim=2である。この例もCAT(0)-dimについては不明である。(2)の証明は $t(\gamma^2)$ に着目する背理法でBaumslag-Solitar群についての議論とやや似ている。

4 CAT(0)空間の理想境界

我々はCAT(0)-dim$_{ss}$ とgeom dimのギャップについて見たが、作用のセミシンプル性はgeom dimの定義に現れない「余分な仮定」であり、できればCAT(0)-dimとgeom dimの関係について考えたい。そのためにはCAT(0)空間 X のパラボリックな変換を扱う必要がある。ハイパボリックな作用を見るとき、その手がかりは軸の集合であった。一方、パラボリックな変換に関しては X 内に自然な不変集合は見当たらない。よって X の「境界」を見る事にしよう。この章ではCAT(0)空間の境界についての基本的な性質を再び[Ba],[BriH]から述べる。

4.1 理想境界、角度、Tits距離

距離空間 X の二つの測地線 $\gamma(t), \gamma'(t), t \geq 0$ が「asymptotic」とは、ある定数 K が存在して、すべての $t \geq 0$ に対して、$|\gamma(t) - \gamma'(t)| \leq K$ が成り立つこと。(このノートでは測地線のパラメータは弧長とする)。二つの測地線がasymptotic のとき同値とし、その同値類を X の「理想境界点」と呼び $\gamma(\infty)$ と書く。それらの集合を $X(\infty)$、集合 $X \cup X(\infty)$ を $\bar{X}$ と書く。ここでは定義は述べないが、$\bar{X}$ には自然なトポロジーが存在し、完備なCAT(0)空間 X の等長変換は測地線を測地線に移し同値関係を保つから $\bar{X}$ の変換に自然に拡張するが、これは同相写像になる。

命題 4.1 X を完備な *CAT(0)* 空間とする。任意の測地線 $\gamma(t), t \geq 0$ と任意の点 x について、x を始点とする γ と同値な測地線がただ一つ存在する。

この命題で存在が保証される測地線を x と $\gamma(\infty)$ を結ぶ測地線という。

例。(i) $\mathbf{E}^n$ の測地線は直線だが、2 つの測地線が同値とは平行であること。よって上の命題も明らか。

(ii) $\mathbf{E}^n$ と $\mathbf{H}^n$ の理想境界は $\mathbf{S}^{n-1}$ に同相。

ここで測地空間 X に「角度」を導入する。$c(t), c'(t)$ を測地線とし、$c(0) = c'(0) = x$ とする。c, c' の（x における）角度 $\angle(c, c')$ を次で定義する。

$$\angle(c, c') = \lim_{t,t' \to 0} \overline{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t')).$$

ただしここで、$\overline{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ は、X の測地三角形 $(c(0), c(t), c'(t'))$ の $\mathbf{E}^2$ における比較三角形 $(\overline{c(0)}, \overline{c(t)}, \overline{c'(t')})$ の頂点 $\overline{c(0)}$ における内角である。

次に、点 $x \in X, p, q \in X(\infty)$ について、x と p, q を結ぶ測地線をそれぞれ $\gamma(t), \delta(t)$ とし、「角度」$\angle_x(p, q)$ を $\angle_x(\gamma, \delta)$ で定義する。ただし、$\gamma(0) = \delta(0) = x$ である。さらに、p, q の角度を

$$\angle(p, q) = \sup_{x \in X} \angle_x(p, q)$$

と定義する。これは距離になる。

例。(i) $\mathbf{E}^n$ の理想境界の 2 点 p, q の角度 $\angle(p, q)$ は内部の点 x と p, q を「結ぶ」直線の x における角度。

(ii) $\mathbf{H}^n$ の理想境界の異なる 2 点 p, q の角度は常に π。理由は、p, q を結ぶ測地線 γ が存在するという事実による。(γ 上の点 x で角度を実現している)。

定理 4.1 *(1)* 完備 *CAT(0)* 空間 X の理想境界 $X(\infty)$ は、角度距離 $\angle$ に関して完備 *CAT(1)* 空間になる。

(2) X の等長変換 f が $X(\infty)$ に定める変換は、$\angle$ に関して等長変換である。

$X(\infty)$ は角度距離 $\angle$ に関して一般に測地空間にはならない。$\angle$ が定める測地距離を「Tits 距離」といい、d_T で表す。ただし、$d_T(p, q) = \infty$ も許容する。たとえば、p, q が $X(\infty)$ の中の道（角度距離について連続ということ）で結べないときは ∞ と考える。もちろん X の等長変換 f は $(X(\infty), d_T)$ の等長変換を与える。

例。(i) $\mathbf{E}^n(n>1)$ において、$\angle = d_T$. よって $(\mathbf{E}^n(\infty), d_T)$ は $\mathbf{S}^{n-1}$ に等長的。一方、$n=1$ の場合（すなわち直線）理想境界は 2 点あるが、$\angle = \pi, d_T = \infty$ である。

(ii) $\mathbf{H}^n(n>1)$ において、理想境界の任意の異なる 2 点の $\angle = \pi$ であることは述べたが、これより $d_T = \infty$ である。これは任意の CAT(-1) 空間で正しい。特に $(\mathbf{H}^n(\infty), d_T)$ は位相空間としても $\mathbf{S}^{n-1}$ と異なる。

定理 4.2 X を完備 *CAT(0)* 空間とすると、$(X(\infty), d_T)$ は完備な *CAT(1)* 空間である。さらに、もし X がプロパーなら $d_T(p,q) < \infty$ を満たす任意の $p, q \in X(\infty)$ は $(X(\infty), d_T)$ の中の測地線で結ばれる。

X がプロパーでも理想境界はプロパーとは限らない。

4.2 Busemann 関数とホロ球面

X を CAT(0) 空間とし $\gamma(t), t \geq 0$ を測地線とする。関数 $b_\gamma : X \to \mathbf{R}$ を次で定義し、γ についての「Busemann 関数」と呼ぶ。

$$b_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty}(|x-\gamma(t)| - t).$$

命題 4.2 上の定義で極限は存在する。γ' を γ と同値な測地線とすると、ある定数 C が存在して任意の x について $b_\gamma(x) - b_{\gamma'}(x) = C$.

上の命題より、X の理想境界の点 $p = \gamma(\infty)$ についての Busemann 関数 b_p が定数差を除いて定まる。よって b_p のレベルセットの族 $H_t = \{x \in X | b_p(x) = t\}$ は γ のとり方のよらず定まる。それらを p についての（または p を中心とする）「ホロ球面」という。ホロ球面のパラメータ t は Busemann 関数を定義するときの測地線 γ による。

例。(i) $\mathbf{E}^n$ において、測地線 (すなわち直線）γ が定める理想境界の点 $p = \gamma(\infty)$ についてのホロ球面は、γ に直行する $(n-1)$ 次元ユークリッド空間の族である。

(ii) $\mathbf{H}^2$ の上半平面モデルを考えるとき、y 軸に平行は直線は同値な測地線だが、その理想境界点についてのホロ球面は x 軸に平行な直線の族である。

4.3　パラボリックな変換

パラボリックな変換を扱うとき、次は手がかりとなる結果である。ただし、X がプロパーでないと結果が成立しない例がある。

定理 4.3 X をプロパーな *CAT(0)* 空間とし、f をそのパラボリックな等長変換とする。このとき理想境界 $X(\infty)$ に f の固定点が存在する。

パラボリックな元 f の固定点全体を $F(f) \subset X(\infty)$ と書く。f と可換な任意の等長変換 g は $F(f)$ を不変にする。一般には CAT(0) 空間のパラボリックな等長変換の固定点は１点とは限らないが、CAT(-1) 空間、特に双曲空間では１点に限る。これは理想境界の任意の２点が X の無限測地線で結ばれるという性質による。このような性質を「visibility 条件」と呼ぶ。これから次の性質が従う。

命題 4.3 *CAT(0)* 空間 X が *visibility* 条件を満たすとする。自由アーベル群 A が X に等長変換で作用しているとし、パラボリックな変換を含むとする。このとき、$X(\infty)$ のある点は A で固定される。

実際、パラボリックな元 $a \in A$ の固定点を $p \in X(\infty)$ とする。これはただ一つの固定点だから A の任意の元は p を固定する。

命題 4.4 *CAT(0)* 空間 X の等長変換 f が点 $p \in X(\infty)$ を固定するとする。p についてのホロ球面の集合を $\{H_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ とする。このとき、f は集合 $\{H_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ に作用する。さらに $t(f) = 0$ なら作用は自明である（各ホロ球面への作用は自明ではない）。

以上より、群の CAT(0) 次元を考えるときパラボリックな作用を許すなら、CAT(0) 空間 X にプロパーという仮定を置くのは手始めとして適当だろう。一方、X に visibility を仮定するのは強すぎると考える。なぜなら、それは空間を CAT(-1) と仮定するのに近く別の問題意識になってしまうからである。従って、リーズナブルな設定として次の問題を考え、講演では解決に向けたアプローチについて話す。

Question: Brady-Crisp, Bridson の群は、プロパーな２次元 CAT(0) 空間 X に等長的、不連続的に作用するか？

答えが否定的なら、geom dim と CAT(0)-dim の (有限の）ギャップが、空間 X への群作用がセミシンプルという仮定なしに存在し興味深い。ただし空間 X がプロパーという仮定の下にである。ゆくゆくは、プロパー

の仮定なしにCAT(0)-dimとgeom dimとのギャップの有無を確かめたい。それにはプロパーとは限らないCAT(0)空間のパラボリック変換に関する新たな結果が必要そうである。

補足（2003年8月）実は次が正しい。

命題 4.5 X をプロパーな *CAT(0)* 空間とする。アーベル群 A が X に等長的に作用していて、パラボリックな元を含むとする。このとき、$X(\infty)$ のある点は A で固定され、その点を中心とする全てのホロスフェアは A で不変。

また上のQuestionの答えはNoであることが分かった（論文を準備中）。しかし空間がプロパーでない場合の答えは不明である。

参考文献

[Ba] Werner Ballmann, "Lectures on spaces of nonpositive curvature". DMV Seminar, 25. Birkhauser, 1995

[BC] Noel Brady, John Crisp. Two-Dimensional Artin Groups with CAT(0) Dimension Three Geometriae Dedicata 94, No1 (2002), 185-214.

[Bri] Martin R. Bridson, Length functions, curvature and the dimension of discrete groups. Math. Res. Lett. 8 (2001), no. 4, 557-567.

[BriH] Martin R. Bridson, Andre Haefliger, "Metric spaces of non-positive curvature". Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319. Springer, 1999.

[Br] Kenneth S. Brown, "Cohomology of groups". Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer, 1982.

[CD] Ruth Charney, Michael W. Davis. Finite $K(\pi, 1)$s for Artin groups. in "Prospects in topology", 110-124, Ann. of Math. Stud. 138, Princeton Univ. Press, 1995.