基本群

０．始めに。

この文章は二つの部分から成り立っている。Ｉは基本群のはじまりの歴史についての、おおまかな記述である。基本群の定義を、正確に述べることはしなかった。理由は、基本群を定義から知るというのは、この文章の目的ではないからである。ＩＩは、基本群にまつわる最近の展開の一つという意味での、無限離散群の話しである。この部分は、著者の興味からくるバイアスが強い。

Ｉ。基本群の生い立ち。

１。ポアンカレと基本群。

基本群を最初に考えたのは、ポアンカレ（Ｐｏｉｎｃａｒｅ）と思われる。１８９２年、ループ（ある点から出発して、その点にもどってくる空間内の連続な線）にそった解析接続によって得られる多価関数の値が、どのようにループによるか、について考察するなかで考えだされた。すなわち、ループをホモトピー（ループを、基点をたもったまま、連続的に変形する操作）で動かしても、解析接続の結果の値が変わらないことから、ループ全体の集合に、ホモトピーによる同値関係を考えて得られる群を、定義したのである。これが基本群（ＦｕｎｄａｍｅｎｔａｌＧｒｏｕｐ）のはじまりである。図形Ｘにたいして、その基本群$\pi_1(X)$と書かれる。

さて、このような定義だと、計算上不便である。というようなことで、すぐあとに、ポアンカレ自身が、組み合わせ的な定義をあたえた。すなわち、多角形をはりあわせてできたような図形で、辺上を通る道を、面をつかったホモトピーで変形することを考える。これによれば、基本群を、いわゆる、生成元と関係式であたえることは、やさしい。この定義の一つの問題点は、基本群が図形だけできまらず、図形を多角形（または多面体）のあつまりであらわす仕方に、よるかもしれないことである。いわゆる、”位相不変性”の問題だが、これは、しばらくあと、１９２０年ころ、アレキサンダー（Ａｌｅｘａｎｄｅｒ）らによる解決を、またなければならなかった。

２。基本群と双曲幾何。

ポアンカレは、１８８２年の論文で、双曲平面のタイル張り（平面、ここでは、双曲幾何という、ユークリッド幾何とは、ことなる幾何があたえられている平面、をある形をした図形（タイルとよぶ）をならべて、ぴったりと覆うことを言う）について、それを保つような双曲平面の変換群を考えている。これは二つの意味でおもしろい。一つは、基本群を、被覆空間とその変換群として考えるということの端緒になっているということ、もうひとつは、基本群と双曲幾何の、その後１００年以上続くつながりを、示唆していることである。これについては、また、あとでも述べる。

３。デーンと組み合わせ群論。

さて、前の記述からも分かるように、基本群は、２次元的な対象、すなわ

ち曲面について考えられたのが始めだが、曲面の基本群について、いくつかの大きな仕事を最初にしたのは、デーン（Ｄｅｈｎ）である。デーンは、ポアンカレによる双曲面のタイル張りから、自然に得られる無限グラフ、いわゆるケイレイ（Ｃａｙｌｅｙ）図形を考えた。タイルのひとつひとつを頂点と考え、隣り合うタイルに対応する頂点を、辺でむすぶことによって得られるグラフである。ケイレイ図形の幾何学をつかって、デーンは、曲面の基本群について、”語の問題”と”共役類の問題”を解決した[4]。これは、離散群について、語の問題と共役類の問題に気が付き、それを、数学の対象にした始めといってもよい。語の問題とは、次のようなものである。離散群は、その生成元と関係式（たとえば Ｚ＋Ｚなら、二つの生成元 a と b が、可換という関係式 ab=ba をみたすことで、群が特徴付けられるが、これを

$Z + Z = \{a, b | ab = ba\}$

と書く）で、与えることができる。これを、群の「表示」とよぶ。そのとき、いくつかの生成元をならべて出来る列（たとえば aaabba とか）が、群のなかで、単位元をあらわすかどうか、決定するという問題である。デーンは、曲面の基本群の表示についての、ある組み合わせ的な性質に着目して、語の問題を解くための、たくみなアルゴリズムを発見した。

ひとことで言うなら、デーンは、ポアンカレやクライン（Klein) らによって、ある程度数学的にしっかりしていた、双曲幾何と曲面のトポロジーに、組み合わせ的なアプローチを導入することで、大きな成果を得たといえる。ところで、上のような仕方でケイレイ図形をいったん導入してしまうと、曲面の基本群に、せっかく付随していた双曲幾何がうしなわれてしまうようにも見える。実は、そうではないのだが、無限グラフの中に双曲性が見て取れることは、１９８０年代になって、グロモフ（Ｇｒｏｍｏｖ）が双曲群の理論で成功をおさめるまで、歴史に埋もれていたようにも見える。双曲群については、また後で述べる。

４。デーンの補題。

さて、曲面の基本群について重要な諸結果を得たデーンは、３次元の図形についても仕事をしている。そのなかで、歴史的に、やや、おもしろいものに、デーンの補題とよばれる主張がある。基本群は、ループのホモトピーによる同値類として定義されるが、その単位群は、一点から動かないループ、すなわち定点写像によって決まるものである。いいかえれば、単位元をあらわすループは、一点にホモトピーで、縮めることができるものであるが、このホモトピーは、円板から、考える図形Ｘへの連続写像と考えられる。ちょうど、円板のふちの行き先がループで、円板の中心が定点である。さて、この円板のＸでの像Ｄは、一般に「特異的」、すなわち、自己交差などがあるわけだが、

「単位元をあらわすループたちについて、そのホモトピーの像Ｄが非特異にできるか？」

という問題に、一定の解答をあたえるのが、デーンの補題である。しかし、デーンによる議論には、問題点があることが、クネーザー（Ｋｎｅｓｅｒ）によって、１９２９年に指摘される。結局、この問題点は、１９５７年にパパキリアカポロス (Papakyriakopoulos) によって、肯定的に解決された。

５。ホモトピー と フルビッツ

さて、基本群は、円周（つまり、1 次元の球面）から、図形への連続写像の、ホモトピー類として定義された。円周を、ｎ次元の球面で置き換えて、同じように、写像のホモトピーをつかって群を定義したものは、ｎ次元ホモトピー群と呼ばれる。このような、高次元ホモトピー群は、フルビッツ（Hurewicz) によって、１９３５年ころ導入された。１次元のホモトピー群が、基本群である。詳しくは述べないが、類似の概念で、やはり、図形に群を対応させるものに、ホモロジー群がある。１８９５年ころ、ポアンカレによって導入された。基本群を可換化した群が、１次元ホモロジー群である。

さて、基本群、ホモトピー群、さらに、ホモロジー群など、図形から決まるいくつかの群があるが、自然な興味として、どのくらい図形を区別できるか、考えてみる。つまり、おなじ基本群（ホモトピー群，。。。）をもった図形がどのくらい沢山あるのか、という問題である。その類の問題の一つとして、ポアンカレ予想がある。

６。ポアンカレ予想。

「ポアンカレ予想」3 次元の境界のない、コンパクトな多様体で、単連結なものは、３次元の球面に位相同型である。

これは、ある条件のもとで、基本群が、その空間を一意に決定する例（になりそうなもの。まだ証明されていないので）である。つまり、３次元、境界のない、コンパクト、多様体という条件のもとでは、基本群が単位群になるものは、一つのもの、つまり、球面だけにかぎるといっている。この予想はポアンカレにより、１９００年代最初のころに提出された。いまのところ未解決である。

４次元以上なら、たとえば、２次元球面二つの直積など、球面ではないが、単連結なコンパクト多様体を構成するのはやさしい。4 次元以上の場合は、ポアンカレ予想（の類似）は、「ｎ次元のコンパクトで境界のない多様体で、ｎ次元球面とおなじホモトピー群をもつものは、ｎ次元球面である」というように、述べられる。これについては、5 次元以上の場合はスメール（Ｓｍａｌｅ）によって（１９６０年)、４次元の場合も、フリードマン（Ｆｒｅｅｄｍａｎ）によって肯定的に解決されている (1982 年)。

いまでは、ポアンカレ予想は、サーストン（Ｔｈｕｒｓｔｏｎ）のいわゆる”３次元多様体の幾何構造予想”の一部をなしている。ただ、ポアンカレ予想が解かれるとして、それが、幾何構造予想が解決されるという形でできるのか、著者には見当がつかない。１９８０年代に導入された、３次元多様体の量子不変量とよばれるものがあり、この不変量がポアンカレ予想の解決

に貢献するのではと、一部に思われた時期もあったが、今のところできていない。

さて、幾何構造予想で、ポアンカレ予想以外の、重要な部分は、双曲構造予想の部分である。一言で言うなら「ほとんどすべての３次元多様体には、双曲構造が入る」というものである。 ＊Ｂ＊

７。ザイフェルト＆ファンカンペンの定理。

さて、実際に基本群を計算する時に便利な定理にザイフェルト（Ｓｅｉｆｅｒｔ）＆ファン·カンペン（Van Ｋａｍｐｅｎ）の定理がある。全体を部分にわけて、計算する方法である。図形ＡとＢが、Ｃをのりしろにして、はりあわされて、全体Ｘができているとき、Ｘの基本群は、Ａの基本群とＢの基本群を、Ｃの基本群をつかって、群論的に、はりあわせてえられる、という主張である。

Ｘ＝Ａ Ｕ Ｃ Ｂなら π１（Ｘ）＝π１（A）＊ π１（Ｃ） π１（Ｂ）（編集者注。Ｃ と π１（Ｃ）は下に下がった添え字で、お願いします。）

ただし、＊ は 群のはりあわせを表す。これは、実は、後述するバス＆セール（Bass ＆ Ｓｅｒｒｅ）理論というやや大掛かりな理論の一部である。

８。被覆空間。

前に、双曲平面のタイル張りから決まる変換群と、曲面の基本群のことに触れたときにも述べたが、基本群の理論で重要な概念が被覆空間である。被覆空間とは文字どおり、空間を被覆する空間のことだが、トーラスを例にとって見よう。絵でわかるように、トーラスを被覆するものには、（左右に無限にのびる）円筒や、平面がある （図１）。

ところで、平面を、被覆するような空間は自分自身しかない。その様な空間を、”普遍被覆空間”とよんでいる。トーラスや、筒の普遍被覆空間は、平面である。

さて、平面からトーラスへの、被覆写像は、群をつかうと見やすい （図２）。二次のアーベル群Ｚ＋Ｚが、平面に作用しているとし、その商空間を考えると、ちょうどトーラスになる。この状況は、一般的で、

「図形Ｘは、その普遍被覆空間に、ある群Ｇが自由に作用しているときの、商空間として得られる。」

この群Ｇが、ちょうどＸの基本群になっている。たとえば、トーラスの基本群は、Ｚ＋Ｚで、円筒の基本群はＺである。

ＩＩ。無限離散群のはなし。

１。ツリーとバス＆セール理論。

さて被覆空間での重要な要素は、群が空間に”自由に”作用する（すなわち、単位元でない元は、空間のどの点も別の点に移すこと）ということである。そのことによって、群と、商空間の基本群が同型であることが導かれる。一般に、作用が自由でないと、固定化部分群の情報が失われてしまう、すなわち、その部分が商空間の基本群に反映されない。

たとえば、一つの点ｐからなる集合Ｘに群Ｇが（自明な仕方で）作用しているとき（というか、Ｘには、一つの要素ｐしかないから、Ｇの元は、それを動かしようがないので、「作用していない」のだが)、その商空間Ｘ／ＧはＸで、その基本群は 単位元だけからなる単位群なので、結局Ｇの情報は基本群では、単位元以外すべて失われることになる。しかしこの場合も、ｐの固定化部分群は、Ｇ自身だから、固定化部分群の情報を、商空間の基本群（この例の場合は、単位群）とあわせれば、もとの群Ｇが復元される。

このことを、空間が１次元の場合に、完全に記述したのが、いわゆるバス＆セール理論である ＊Ｃ＊。単連結な１次元の図形（複体）であるツリーＴに群Ｇが作用しているとき（頂点は頂点に移すというような仕方で)、商空間Ｔ／Ｇを考えると、グラフ になる。一般にグラフの基本群は、自由群だが、それと合わせて、ツリーＴの頂点と辺の固定化部分群を覚えておくと、Ｇが復元できることを理論は述べている。

その特別な場合として、セールの本に、

「ツリー (tree) に自由 (free) に作用する群は自由群 (free group) である」

という命題がある ＊Ｄ＊。この命題から

「自由群の部分群は、自由群である」

という主張も従うのだが、これなどは、自由群の代数的な定義を使って、示そうとすると、そう簡単でもなく、一方、幾何的には、１次元（グラフのこと）のものの被覆空間は、やはり１次元（グラフになる) であるということで、数学における幾何の強さと美しさがよくでていると思う。

さて、バス＆セール理論の一番簡単な場合をすこし述べよう。すなわち、商グラフＴ／Ｇが、ただ一つの辺からなる場合である。この場合、二つのグラフがある （図３)。実は、図３－１の場合がちょうど、ザイフェルト＆ファンカンペンの定理に相当している。つまり、群ＡとＢをのりしろＣで貼り付けるということである。一方、図３－２の場合は群Ａを部分群Ｃをつかって（くるっとまわって)、ふたたび自分自身Ａに貼り付ける操作を示している。結局、１と２の二つの場合は、出来上がった群Ｇをのりしろで”切った”とき、

（１） 二つにわかれる。（２） 一つのまま。

という、二つの場合に対応している。

さて、同じ群Ｇを二つの仕方ＣとＤで切ったらどうだろう？この場合も二通りある（図４)。

（１） ＣとＤは交わらない。（２） ＣとＤは交わる。

言葉足らずになるのを承知で書けば、１の場合は、ＣとＤがそれぞれ独立して存在するので、それを、バス＆セール理論だけで、同時に記述できる。ところが、２の場合は実はうまくできない。バス＆セール理論という１次元の理論では、足らないのである。その一つの解決は、スターリングス＆ヘフリガー（Ｓｔａｌｌｉｎｇｓ＆Ｈａｅｆｌｉｇｅｒ）による、いわば高次元

バス＆セール理論によってできる。

２。ティッツの二者択一性。

群Ｇの有限生成部分群Ｈが、それぞれ、”大きいか小さいか”のどちらかのとき、Gは「ティッツ（Ｔｉｔｓ）の二者択一性」を満たすという。それぞれの部分群Ｈについて、大きいか、小さいか、どちらかである、といっているわけで、大きいか小さいかは、考える部分群Ｈによってもよい。

ここで、大きいとは２階の自由群を含むということ、小さいとは大体、たかだか可解な群（正確には、有限指数の部分群として、可解な群を含む）であるということである。たとえば、セルバーグ（Ｓｅｌｂｅｒｇ）の結果に

「線形群はティッツの二者択一性が成立する」

というものがある。線形群の大体の定義は、行列からなる群の部分群のようなものである。

このような概念が導入されるからには、中間的な群も存在する。それらの群は悩ましい存在であるので、ティッツの二者択一性は、考えている群が”行儀のよい”ものであるかどうかの、わかりやすい基準である。たとえば、上の命題から、「コンパクトな双曲多様体の基本群は、ティッツの二者択一性が成り立つ」ことがわかる。これは、双曲多様体の基本群は、双曲空間Ｈ＾ｎに対応するリー群（ＳＯ（ｎ，１）である）の部分群だからである。

３。リー群の格子群と剛性定理。

さて無限離散群の重要な例として、リー群の格子群がある。たとえば、加群Ｒ＾ｎの中のＺ＾ｎ（ちょうど、格子のようにみえる）とか、ＳＬ（ｎ、Ｒ）のなかのＳＬ（ｎ，Ｚ）などである。格子群について述べる前に、なぜ、リー群が（たとえば幾何学者にとって）興味があるのかといえば、ひとつは、そこから、豊富に多様体が構成できるからであろう。いわゆる対称空間だが、そのような対称空間を、普遍被覆空間としてもつような空間の基本群として、格子群があらわれる。たとえば、Ｒ＾ｎをＺ＾ｎで割った空間がｎ次元のトーラスで、その基本群がＺ＾ｎである、というようにである。

この格子群について、次のような問題を考えよう。定義から格子群 Ｌ はあるリー群Ｇの部分群だが、（それも定義によって、商空間Ｇ／Ｌがコンパクトまたは、有限体積）、

「リー群Ｇの格子群 Ｌが、別のリー群 Ｈの格子群にも なるだろうか？」

たとえば、ＳＬ（２，Ｚ）はＳＬ（２，Ｒ）の格子だが、ＳＬ（３，Ｒ）の格子にもなれるのだろうか？ これは、基本群の言葉をつかって述べた問題

「基本群は、どのくらい空間を決定するか？」

つまり、たとえば、同じ基本群をもった空間は、何かの意味で同じといえるか、というような問いの特別な場合と考えられる。すなわち、ここでは、空間としては、リー群とその格子群から得られるものに限って考えていて、この場合、格子群が基本群として現れる。

この問題に最初に一定の成果を得たのがフルステンバーグ（Ｆｕｒｓｔｅ

ｎｂｅｒｇ）である。19６０年代の半ばから終わりころ、フルステンバーグは、一般に群の境界という概念を、群上のランダムウォークの空間を考えることにより定義した。ポアソン（Ｐｏｉｓｓｏｎ）境界とよばれる。それをつかって、格子Ｌを格子として含むリー群は、元の物しかないということを、いくつかの場合にしめした。無限な群の境界とは、どんなものかといえば、無限にひろがる宇宙を、丸い天井に投影したプラネタリウムの天空のようなものだ、と言っても良いかもしれない。

フルステンバーグの議論を、一言で言うなら、格子Ｌとそれを含むリー群Ｇのポアソン境界は、およそ似たようなものになるという点から、格子を決めると、それを含むリー群が決まるというように議論する。こういう現象を一般に、”剛性”、または、Ｌについての剛性定理などという。ところで、格子Ｌの上のランダムウォークは、群Ｌに対応する無限グラフ（前にのべたケイレイグラフのこと）上で、考える。群を幾何学的対象に、まず置き換えて考えるというところで、いまでいう幾何学的群論の萌芽という意味でもおもしろい。

さて、フルステンバーグのすこしあと、１９７０年代の始めころ、モストウ（Ｍｏｓｔｏｗ）が双曲空間の場合の基本群について、やはり剛性定理を示した。リー群の言葉でいえば、ランクが1と呼ばれる場合である。これもやはり双曲空間の境界を、やや別の仕方で定義することで、議論する。

ところで、フルステンバーグの計画は完成しなかった。たぶん、一つの理由は、(旧）ソ連のマルグリス（Ｍａｒｇｕｌｉｓ）が、かなり完全な形で、格子の剛性問題を解いたことにあると思われる。１９７０年代のことである。この一連の結果は、超剛性定理とよばれるが、これは、リー群について現在しられている、もっとも深い結果のひとつである。

さて、一度は、途絶えたフルステンバーグのポアソン境界のアイディアであるが、そのよいところは、リー群の格子とは限らない無限離散群に適用可能である点だ。そのことから、最近、一般の離散群の剛性に関する研究で、ふたたび注目されている。

４。グロモフの双曲群。

１９８０年代半ば、グロモフはその後の離散群の研究に重要な概念を導入した。いわゆる双曲群である。群の双曲性のまえに、空間の双曲性を、おさらいしよう。 平らな空間として、ユークリッド平面があり（図５－２)、まがった空間として、球面がある（図５－１)。球面のある地点から、まわりの様子をみると、ユークリッド空間に比べて、すぼまっている、または、空間の広がり具合がすくない。それを、”正に曲がっている”と、考え、”負に曲がっている”ということを、ユークリッド空間に比べて、より、広がっていくような性質と考える。たとえば、負の曲率の空間として、鞍型がある（図５－３)。

この図からもわかるように、起点からの曲がり具合が互いに逆方向という

いみで、双曲空間ともよばれる。さて、曲率（うえの記述からもわかるように、起点のごく近くから決まる、局所的な量である）の、全体的な勘定を記述するものに、ガウス＆ボンネ(Gauss　Ｂｏｎｎｅ）の定理がある。それを、各辺が測地線からなる三角形について書いてみる。測地線とは、2点を結ぶ最短線のことである。(つまり、ユークリッド空間では、まっすぐな線ということ)。

ＳＫ ＝３つの内角の和ーπ （編集注。左のＳは積分記号です）

ここでKは曲率である。さて、ユークリッド空間では、Ｋ＝０だから、左辺は０で、この式は、つまり、３角形の内角の和がπであることを言っている。さて、曲率がＫ＝－１なら、左辺は、Ｋを三角形上で積分するのだから、ちょうど、三角形の面積 × ー１ になる。3角形の面積をＡとかくと、－Ａ＝内角の和ーπである。よって、内角の和＝πーＡ＜πとなり、負に曲がった空間では、三角形の内角の和は、πより小さいことがわかる。一方、Ａ＝πー内角の和＜πだから、三角形の面積Aは πより小さい。さて、ここで、一辺が長い三角形をＫ＝－１の空間に書いてみよう。ガウス＆ボンネの定理からそれは、どんどん”やせほそって”しまう （図６)。

グロモフはこれを見て、次の定義を導入した。

「三角形が、やせ細った群を”双曲群”と定義する。」

ここでの三角形とは、考えている群のケイレイグラフに書いた、(三辺が測地線からなる）三角形のことである。ケイレイグラフは、群の幾何学的な実現となっているので、その双曲性で、群の双曲性を定義する。たとえば、格子Ｚ＾２のケーレーグラフは、格子だし、２階の自由群のケーレーグラフは各点に４本の辺がある、ツリーである。このツリーは、８の字（その基本群は、２階の自由群である）の普遍被覆空間になっている。

一見、荒唐無稽にみえる、群の双曲性の定義だが、双曲性は、過去１５年くらい、離散群論の大きな牽引力になってきて、双曲群が、豊かな数学をうみだすことがわかっている。たとえば、双曲群ではティッツの二者択一性は成り立つ。群の双曲性のような、一見あいまいな定義から、このような、代数的な結果が従うのは不思議でもあり、おもしろくもある。

５。最近のはなし。

１９９０年代に入ってから、グロモフらによって始められた、離散群を幾何学的な対象と見て研究すること、いわゆる「幾何学的群論」が、いくつかの大きな成果をおさめている。たとえば、リー群の格子についての、従来より強力な剛性定理が、まったく違った仕方で得られている。また、離散群論と低次元トポロジーの、密接な関連を示す例として、３次元多様体のＪＳＪ分解に類似するような、有限生成群Ｇに関する、ある種の構造定理などもある。群のＪＳＪ分解とよばれている。

そもそも、ＪＳＪとは、ジェコ（Ｊａｃｏ)、シャーレン（Ｓｈａｌｅｎ)、ヨハンソン（Ｊｏｈａｎｎｓｏｎ）という、３人の低次元トポロジストの頭

文字であるが、この３人は、１９７０年代に、3次元多様体を、それに埋め込まれた、球面や2次元トーラスで切って分解することについての理論を展開した。この成果は、特に、サーストンの予想を述べるために使われるという意味でも、３次元多様体論での重要な理論である。最近、ある意味で類似の分解が、一般の有限生成群に存在することが分かっている。

さて、最後に基本群と計算量、または計算機との関係を述べよう。１９８０年代の終わり、エプスタイン（Ｅｐｓｔｅｉｎ）とサーストンが中心になって、「オートマチック性」と呼ばれる概念が、離散群に導入された。いわゆるオートマチック群である。オートマチック群とは、一言で言えば、群構造が（計算機にとって扱いやすいという意味で）かなり単純であるということで定義される。オートマチック群の理論は、いまのところ、やや不完全なのだが、それは、オートマチック性から、群構造についてみちびかれる性質が、あまり知られていないことにある。たとえば、ティッツの二者択一性は知られていない。

ここ数年、広い意味で、計算量問題の観点からの、群論やトポロジーについての研究が目に付く。つまり、たとえば、抽象的に何かの存在定理などを述べるだけでなく、実際に、その結果をどのように”計算”したらよいかとか、計算にどのくらい手間がかかるかとかいうようなことを考える。たとえば、前にのべた、群の語の問題で、（語の問題が解けると分かっている）群の表示が与えられたとき、その表示から、どれくらい効率的な、語の問題についてのアルゴリズムが得られるかを、定量的に考えるような問題である。

トポロジーでも、計算量問題への関心が強まっているのは、最近の計算機の爆発的な発展と普及と無縁ではないと思う。一体、数学は今後、どんな影響を受けるのだろう。興味深い問題である。

藤原耕二（東北大学。fujiwara@math.tohoku.ac.jp)

（注)

＊Ａ＊語の問題。一般には、語の問題はとけないことが、ノビコフ（Ｎｏｖｉｋｏｖ）によって示されている（１９５５年)。

＊Ｂ＊つくづく思うのだが、数学の各分野の発展には、それを引っ張る予想や将来構想が大事で、その意味でも、ポアンカレ予想を、幾何構造予想の一部に位置づけた、サーストンのプログラムの意義は大きいと思う。当時のＩＣＭの報告集などをみると、１９５０年から６０年代位はポアンカレ予想は、3次元トポロジーの中心的な課題であることが良く分かる。しかし、その後の流れまで考慮した上で考えると、幾何構造予想なしには、孤立したかもしれないとも、思われる。

＊Ｃ＊バス＆セール理論のきっかけについて、セールの本をみると、「画期的な伊原の定理を理解するため」 と書いてある。ここで、伊原の定理とは、ある種の数論的な格子群が、自由群であることを主張するものである。

＊Ｄ＊はじめて見たとき、free と tree が韻をふむ、文の調子のよさに感心

した。

（終わり）