離散群と双曲幾何

幾何学的群論のガイドツアー

藤原耕二

(指針)：

1. 双曲幾何と離散群
2. 2次元、3次元多様体と離散群
3. 余次元1の部分多様体と離散群の分解

(道具)：

1. 距離空間、離散群の擬等長性
2. Gromov双曲性
3. Gromov-Hausdorff収束
4. ツリーへの群作用

§1. パノラマ

§1.1. Dehnの問題(1910年ころ)

1. **語の問題(word problem):**
   生成元の積で与えられた元$g \in G$が単位元か判定せよ。
2. **共役問題(conjugacy problem):**
   Gの任意の二元 g, hがGの中で共役か判定せよ。
3. **同型問題(isomorphism problem):**
   与えられた二つの群が同型か判定せよ。

(注意）

一般的には不可能(**P.S.Novikov 1954**).

(定義：擬等長)

(X, d_X), (Y, d_Y): 距離空間が擬等長

(quasi-isometric)

$\Leftrightarrow$

$\exists$写像$f: X \to Y$と定数$K \geq 1, \epsilon \geq 0$ s.t.

(1) $\forall x, y \in X$,

$$\frac{d_X(x,y)}{K} - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x,y) + \epsilon.$$

(2) $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ s.t.

$$d_Y(y, f(x)) \leq \epsilon.$$

(注意)

1) 擬等長性は距離空間に同値関係を定める。

2) 擬等長写像は等長写像「のようなもの」だが、ある等長写像があって、その「小さい変形」とは限らない。

(定義:語距離)

有限生成群Gと、ある有限生成元集合S.

$S=S^{-1}$とする。

- 語(word)とはS の元の有限列wのこと.

その長さを$l(w)$と書く。

語wが自然に表すGの元を$\bar{w}$と書く。

- G上の関数l_Sを定義:

単位元e_Gについては$l_S(e_G)=0$.

e_Gでない元gについては

$$l_S(g)=\min_{\{w|\bar{w}=g\}} l(w).$$

- G上に語距離(word metric)d_S を定義。

$$d_S(g,h)=l_S(g^{-1}h)$$

§1.2. Stallings のエンド定理

(定義：空間のエンド)

X: 局所コンパクトで連結な距離空間.

コンパクト部分集合 $K \subset X$.

$e(X, K)$: $X \setminus K$ の非有界な連結成分の個数。

X のエンドの個数 $e(G)$ とは

$$e(X) = \sup_K e(X, K).$$

(例)

● $e(\mathrm{R}) = 2$,

● $e(\mathrm{R}^n) = 1 (n \geq 2)$.

● T:各頂点の次数が3以上のツリー

$e(T) = \infty$.

(定義：群のエンド）

プロパーな測地空間のエンドの数は

擬等長不変である。

よって有限生成群$\boldsymbol{G}$群のエンドの個数$\boldsymbol{e(G)}$

$=$ **Cayley** グラフ$\boldsymbol{\Gamma(G,S)}$の$\boldsymbol{e(\Gamma)}$と定義。

- $\boldsymbol{e(G)}$は群の擬等長不変量である。

(事実）

1) $\boldsymbol{e(G) = 0, 1, 2, \infty}$**(Hopf, 1943).**

2) $\boldsymbol{e(G) = 0 \Leftrightarrow G}$が有限群.

3) 一般的には$\boldsymbol{e(G) = 1}$. 特に分類なし。

例**:** $\boldsymbol{e(\mathbb{Z}^n) = 1 (n \geq 2)}$**.**

J.Stallingsによる$e(G)=2,\infty$であるGの代数的分類.

(2の場合はC.T.C.Wall, 1967).

<u>定理</u> 1 (Stallings, 1968) .

1. $e(G)=2 \Leftrightarrow \mathbb{Z} < G$, 有限指数.

2. $e(G)=\infty$. $\Leftrightarrow$ 次のいずれか:

(a) $G = A *_C B$.

Cは有限群, $|A/C| \geq 3, |B/C| \geq 2$.

(b) $G = A*_C$.

Cは有限群, $|A/C| \geq 2$.

(注意)

Gにトージョンがなければ$G = A * B$.

§1.3. Mostow剛性。

<u>定理</u> **2 (Mostow.1973)**（***Rank1***-実双曲の場合）

M, N:コンパクト, 境界のない双曲多様体。

次元は3以上。

基本群$\pi_1(M)$と$\pi_1(N)$が同型.

$\Rightarrow$ MとNは等長。

（補足）

1) 局所対称空間で正しい。

2) Mostow剛性はより強い事を言っている：

$G = \pi_1(M), H = \pi_1(N)$ とし、

$a : G \longrightarrow H$を同型写像とする。

これは等長写像$f : M \longrightarrow N$で誘導.

• 正確には: $G, H \subset \mathrm{Isom}(\mathrm{H}^n)$ とする。

$\Rightarrow$ G, H は共役。つまり、

$\exists f \in \mathrm{Isom}(\mathrm{H}^n)$ s.t. $\forall g \in G$

$$a(g) = fgf^{-1}.$$

よって $f \in Isom(\mathrm{H}^n/G, \mathrm{H}^n/H)$.

これが a を誘導。

• $G = H$ として $a \in Aut(G)$ に適用:

$f \in Isom(\mathrm{H}^n/G)$. 対応 $a \to f$ より

$$Out(G) \simeq Isom(M).$$

（事実）

M: 閉負曲率多様体 $\Rightarrow$ $Isom(M)$ 有限群。

（系）

M：閉双曲多様体。次元 3 以上

$\Rightarrow$ $Out(\pi_1(M))$ は有限群。

(比較)

$Out(\pi_1($閉双曲曲面$))$ ＝写像類群。

（Mostowのある一般化）

定理 3 (Ballmann-Gromov-Schroeder.1981)

M:コンパクトで非可約な局所対称空間.

$Rank$は2以上。

N:コンパクトなリーマン多様体.

断面曲率$K \leq 0$.

M, Nの体積は等しく、$\pi_1(M), \pi_1(N)$が同型。

$\Rightarrow$

M, Nは等長。

(注意)

NもRankが2以上のコンパクトで非可約な局所対称空間のときが、Mostowの剛性定理。

Rank-1では次のような現象がある。

<u>定理</u> **4 (Farrell-Jones) .**

$\forall\delta > 0,\ \forall n \geq 5$について

$\exists M, N$: n次元のコンパクトなリーマン多様体

s.t.

1. M, Nは位相同型だが微分同型ではない。
2. Mの断面曲率$K_M = -1.$
   Nの断面曲率K_Nについて
$$-1-\delta \leq K_N \leq -1.$$

(注意)

1) Nには断面曲率$= -1$のリーマン計量は入らない（もし入ればMostow剛性よりM, Nは等長、特に微分同型）。

2) $\mathbf{2}$次元では$-\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{K_N} \leq -\mathbf{1}$の計量があれば$\boldsymbol{K}=-\mathbf{1}$の計量が入る。

3) $\mathbf{3}$次元でも多分そうである(幾何化予想より)**.**

4) $\mathbf{4}$次元以上ではそうとは限らない **(Gromov-Thurston).**

<u>定理</u> **5 (Gromov-Thurston, 1987)** ***.***

$\forall \boldsymbol{n} \geq 4, \forall \boldsymbol{\delta} > 0,$

$\exists \boldsymbol{M}$ **:** $\boldsymbol{n}$次元の閉じたリーマン多様体 ***s.t.***

1) $-\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta} \leq \boldsymbol{K} \leq -\mathbf{1}$

2) $\boldsymbol{M}$に双曲構造は入らない。

§1.4. Gromovの多項式増大度定理

(G, S): 有限生成群.

- 増大度関数(growth function)を次で定義：

$n \in \mathbb{N}$に対して

$$\gamma_S(n) = \sharp\{g \in G | l_S(g) = n\}.$$

- 多項式増大度(polynomial growth) を持つ。

$\Leftrightarrow$

nのある多項式 $p(n)$が存在して、$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_S(n) \leq p(n)$$

- 指数増大度(exponential growth)を持つ。

$\Leftrightarrow$

定数$C > 0$が存在して、$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(Cn) \leq \gamma_S(n).$$

- 増大度はGの擬等長類だけによる。

(リーマン多様体の曲率と基本群の増大度)

<u>定理</u> **6 (J.Milnor, 1968) .**
コンパクトで負の断面曲率を持つリーマン多様体の基本群は指数増大度を持つ。

- 次はより強い結果。ひとつの「剛性定理」。

<u>定理</u> **7 (Avez, 1970) .**
M をコンパクトなリーマン多様体で
断面曲率が $\leq \mathbf{0}$ とする。
M がフラットでなければ、
基本群は指数増大度を持つ。

- 有限生成のベキ零群は多項式増大度を持ち、
  多項式の次数も計算されている(**H.Bass, 1972**).

<u>定理</u> **8 (Gromov, 1981)** *.*
有限生成群Gについて次は同値：

1. 多項式増大度を持つ。

2. Gに有限指数の冪零部分群が存在する。

(自明な系）
増大度は擬等長不変だから、有限指数の冪零部分群の存在は群の擬等長不変な性質。

(補足)
多項式増大度も指数増大度も持たない時、中間増大度(**intermediate growth**) を持つという。
有限生成群で中間増大度を持つ例が知られているが(**R.I.Grigorchuk,1983**)、有限表示群では例が知られていない。

Gromovのプログラム:
「有限生成群を擬等長によって分類せよ」

（雛形的な定理）

● **Stallings**のエンド定理：

無限個のエンド（擬等長不変)

$\Leftrightarrow$

有限部分群について分解（代数的性質）

● **Gromov**の増大度定理：

多項式増大度（擬等長不変）

$\Leftrightarrow$

有限指数ベキ零部分群を含む（代数的性質）

(増大度定理の系）

G:有限生成群, ユークリッド平面$\mathbf{E}^2$と擬等長。

$\Rightarrow$

有限群Fが存在し次の完全系列を満たす。

$$1 \to F \to G \to \mathbb{Z}^2 \to 0.$$

Gにトージョンがなければ$G = \mathbb{Z}^2$。

定理 9 (Sullivan 1978-Gromov) .

有限生成群GとH^3が擬等長。

$\Rightarrow$

準同型$g : G \to Isom(\mathrm{H}^3)$ が存在し

$Ker(g)$は有限群で$Im(g)$は一様格子群。

（補足）

1) H^3の一様格子Gは全てH^3と擬等長。従って、「およそ」それらの全てが1つの「擬等長クラス」をなしている。

2) 一方, $\mathbb{Z}^2$はそれだけで「擬等長クラス」をなしている。

(証明の概略)

$G < Isom(G)$：群Gの自分のCayleyグラフへの作用。

仮定: Gと$\mathbb{H}^3$が擬等長

$\Rightarrow \exists$ 準同型$f : G \to QIsom(\mathbb{H}^3)$.

これは離散、ココンパクトな作用。

● 古典的な結果：$\partial \mathbb{H}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

$Isom(\mathbb{H}^n) = Conf(\mathbb{S}^{n-1})$

$QIsom(\mathbb{H}^n) = QConf(\mathbb{S}^{n-1})$.

(Sullivan) 可算群の$\mathbb{S}^2$へのuniform にquasi-conformalな作用は、$\mathbb{S}^2$へのconformalな作用と、ある$a \in Qconf(\mathbb{S}^2)$ で共役。

●これを上の同型を使ってfに適用:

$\exists$ 準同型$g : G \to Isom(\mathbb{H}^3)$,

$a \in QIsom(\mathbb{H}^3)$によって

$$f = aga^{-1}.$$

このgがGの$\mathbb{H}^3$への求める作用を与える。

（これも離散、ココンパクト）。

§2. 双曲群(Gromov, 1987)

§2.1. Gromov双曲空間

(X, d):完備測地空間.

- $\delta \geq 0$:ある定数.

$\triangle$:Xの三角形がδ-細い(thin)

$\Leftrightarrow$

任意の一辺aが他の二辺b, cのδ-近傍に入る：

$$a \subset N_\delta(b \cup c).$$

- $\delta \geq 0$:ある定数.

Xはδ-双曲的(hyperbolic)、

または単に(Gromov-)双曲的.

$\Leftrightarrow$

X の任意の測地三角形がδ-細い.

(注意）

双曲性は測地空間の擬等長類で不変

(証明には下の命題が必要)。

(例：Gromov双曲空間)

- M:単連結完備リーマン多様体, $K \leq -1$。

$\Rightarrow$ MはGromov-hyperbolic.

(注意)

2次元なら、Gauss-BonnetよりMの任意の測地三角形の面積はπ以下。

特にn次元双曲空間H^nは双曲的。

- ツリーは(0-)双曲的。
- 次元が2以上のEuclid空間は双曲的でない。

（定義）

連結な測地空間がR-ツリー

$\Leftrightarrow$ ループを含まない

$\Leftrightarrow$ 0-双曲的。

（注意）

X:δ-双曲的, $r > 0$:定数.

$\Rightarrow$ X/rはδ/r-双曲的。

特に$r_i \to \infty$なら$X/r_i \to R$-ツリー

連結な$I \subset \mathrm{R}$からXへの連続写像

$f : I \to X$を道とよぶ。

(定義：擬測地線）

$K \geq 1$、$\epsilon \geq 0$：定数。

α: 弧長パラメータを持つ道が

(K, ϵ)-擬測地線(quasi-geodesic)

$\Leftrightarrow$

$\forall t, s$について:

$$|t - s| \leq K d(\alpha(t), \alpha(s)) + \epsilon.$$

- 双曲空間の擬測地線の「安定性」。

Euclid平面では不成立。

<u>命題</u> 1 .

$\delta, \epsilon \geq 0, K \geq 1$:任意の定数

$\exists C(\delta, K, \epsilon) \geq 0 \ \ s.t.$

δ-双曲空間Xの任意の(K, ϵ)-擬測地線αは、

Xのある測地線γのC-近傍に含まれる。

$$\alpha \subset N_\delta(\gamma).$$

§2.2. 双曲群

(定義：双曲群)

(G, S)：有限生成群が双曲群

(word-hyperbolic group)

$\Leftrightarrow$

Cayley グラフ $\Gamma(G, S)$ が Gromov-双曲的.

● 測地空間の双曲性は擬等長不変なので、

群の双曲性は生成元に依存しない。

● 双曲群は常に有限表示。

（直ちに分かる例）

◇ 有限群

◇ 有限生成自由群（特に $\mathbb{Z}$).

◇ $\mathbb{Z}^2$ は双曲群でない.

$\mathbb{Z}^2 < G$ は双曲群でない.

（定義）

群Gの距離空間Xへの等長作用が

不連続(**properly discontinuous**)

$\Leftrightarrow$

任意の点$x \in X$と任意の定数$r > 0$

次を満たす元gの個数が有限:

$$\{g \in G | d(x, gx) < r\}.$$

<u>定理</u> **10 .**

群Gが測地空間Xに等長的、不連続に作用。

X/Gがコンパクト.

$\Rightarrow$

Gは有限生成，XとG（正確にはその$Cayley$グラフ）は擬等長。

(系）

コンパクトなリーマン多様体Mの普遍被覆と$\pi_1(M)$は擬等長。

(例）

コンパクトな負曲率リーマン多様体（特に種数2以上の閉曲面）の基本群は双曲群。

§ 2.3. 等周不等式

◇ 双曲平面$\mathbf{H}^2$に単純閉曲線cを考える。

その長さを$l(c)$.

それが囲む有界領域の面積を$A(c)$。

定数Kが存在して、任意のループcに対して

「線形の等周不等式」が成立:

$$A(c) \leq Kl(c).$$

◇ ユークリッド平面$\mathbf{E}^2$では

2次の等周不等式が成立:

任意のループcについて、

$$A(c) \leq \frac{1}{4\pi}(l(c))^2.$$

（有限表示群Gの等周不等式）

$$G =< S|R > : \text{群の表示}$$

有限集合S:生成元集合, 有限集合R:関係式集合。

$F(S)$: Sの生成する自由群.

$N(R)$: $F(S)$で集合Rの生成する正規部分群.

- 群の表示の定義より$G \simeq F(S)/N(R)$。

すなわち自然な全射準同型

$$F(S) \to G$$

の核が$N(R)$。

- $N(R)$の定義より、

各元$w \in N(R) < F(S)$は、

Rの元の$F(S)$内での共役の有限個の積：

$$w = r_1^{a_1} \cdots r_n^{a_n}, (F(S)\text{での等号})$$

$r_i \in R, a_i \in F(S)$で、$r_i^{a_i} = a_i r_i a_i^{-1}$。

◇ 長さnの最小値を$A(w)$。

(定義）

Gは「線形の等周不等式」を満たす。

$\Leftrightarrow$

ある定数Kが存在して、任意の$w \in N(R)$について

$$A(w) \leq Kl(w)$$

$l(w)$はワードwの長さである。

（注意）

$w \in N(R) \quad \Leftrightarrow w$がCayleyグラフでループ。

- $A(w) \leq K(l(w))^2$ならば「2次の等周不等式」を満たすなどという。

<u>定理</u> **11 .**

有限表示群Gについて次は同値。

1. Gは双曲群。

2. Gは線形の等周不等式を満たす.

(注意)

1) 双曲群の語の問題の解決には等周不等式が使われる。

● 大事な点は線形等周不等式

$A(w) \leq Kl(w)$

の等周定数Kがあらかじめ計算できること。

● Kが分かってしまえば語の問題は容易。

● 群において2次未満の等周不等式

$\Rightarrow$ 線形等周不等式.

2) small cancellation 群で線形の等周不等式が成立するのを見て取るのは易しい。Dehnアルゴリズムの説明。

§2.4. Out(G)の有限性とR-ツリー

§2.4.1 Out(G)

（曲面の写像類群）

Σ: 閉曲面，種数$g \geq 2$.

$G = \pi_1(\Sigma)$.

$G = A *_{\mathbb{Z}} B \leftrightarrow$ ループ$\sigma \subset \Sigma$.

$c = \pi_1(\sigma), < c >= \mathbb{Z}$.

デーンツイスト d_σ.

$$a \to a(a \in A), b \to cbc^{-1}(b \in B).$$

$d_\sigma \neq 1 \in Out(G)$.

$Out(G)$:写像類群。無限群。d_σが生成。

（双曲群への一般化）

<u>定理</u> **12 (Bestvina-Paulin-Rips)** *.*

G:双曲群。

外部自己同型群$Out(G)$が無限群

$\Rightarrow$

有限部分群か、ほとんど$(virtually)\mathbb{Z}$な部分群CについてGが分解。

すなわち$G = A *_C B$ または$G = A*_C$.

□□□ 証明の概略は後で説明する。

(注意)

1) ある群Aが「ほとんど何々」とはその性質「何々」を満たす部分群$B < A$が有限指数で存在すること。上の場合$\mathbb{Z} < C$, 有限指数。

2) M: 閉双曲多様体。次元3以上。$G = \pi_1(M)$ なら$Out(G)$有限(Mostow).

§2.4.2 $\mathrm{Isom}(\mathrm{H}^n)$

有限表示群 G の $Isom(\mathrm{H}^n)$ への忠実で離散的 (faithful, discrete) な表現全体：

$$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^n))$$

$Isom(\mathrm{H}^n)$ の元による共役で割った空間：

$$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^n))/conj$$

(注意)

1) G が 3 次元以上の閉多様体 M の基本群

$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^n))/conj$

は高々一点 (Mostow).

2) G が種数 g の閉曲面 S の基本群

$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^n))/conj$

は S のタイヒミュラー空間$=\mathrm{R}^{6g-6}$.

（Mostowの一般化；3次元で境界がある場合）

M: 3次元のコンパクト多様体

境界があるかもしれない

G:　その基本群。

<u>定理</u> **13 (Thurstonのコンパクト定理)** .

Mは本質的な球面、シリンダー、

トーラスを含まない。

Gはアーベル群でない。

$\Rightarrow$

$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^3))/conj$はコンパクト。

□□□　証明は後で説明。

(注意)

Mが閉なら高々1点(Mostow).

（定理の仮定を基本群の言葉で言い換える）

（3次元トポロジーの事実）

Mが本質的な球面、シリンダー、またはトーラスを含む

$\Rightarrow$(ファン・カンペン),

$\Leftarrow$(Stallings ら)

基本群は$G = A *_C B$と分解。

ただし$C = 1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$。

（補足）

1) Cがアーベル群なのでCに関するDehnツイストが

$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^3))/conj$

に作用．表現空間がコンパクトにならないと期待される。

2) 実際、曲面群Gの場合はコンパクトでない（タイヒミュラー空間）。

$G = A *_{\mathbb{Z}} B.$

§2.4.3. 群の分解とHom_{FD}のコンパクト性 (Thurstonのコンパクト定理の一般化):

(注) 3次元多様体Mでは:

$\pi_1(M)$が$1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$で分解

$\leftrightarrow$ 球面、シリンダー、トーラス $\subset M$.

<u>定理</u> 14 (Bestvina-Feighn) .

G:有限表示群. ほとんどアーベル群でない.

$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^n))/conj$

はコンパクトでない。

$\Rightarrow$

Gはほとんどアーベル群について分解。

(補足) 上の (注) より、これはサーストンのコンパクト定理の一般化。

□□□　証明は下と合わせて、次に説明

(比較) Bestvina-Paulin-Rips:

G:双曲群, $Out(G)$ 無限

$\Rightarrow$ Gは、ほとんど$1, \mathbb{Z}$について分解。

•$Out(G) \leftrightarrow Hom(G, Isom(G))/conj$

□□□（2つの定理の証明のアウトライン）

(Hom_{FD}のコンパクト化。境界点は何か？)

<u>定理</u> **15 (Bestvina-Paulin) .**

*G:*有限表示群．ほとんどアーベル群でない．

$Hom_{FD}(G, Isom(\mathrm{H}^n))/conj$

はコンパクトでない。

$\Rightarrow$*(G*共変、点つき*Gromov-Hausdorff*収束!）

GはR-ツリーTに作用し次を満たす。

・ 作用は*stable.*

・ 共通の固定点なし。

・ アーク$I \subset T$の固定化部分群は

ほとんどアーベル群 (参考:*Margulis lemma).*

（証明）GのH^n作用が発散。数列$r_i \to \infty$を使ってH^nをスケーリング。

$\mathrm{H}^n/r_i \to$ ツリーT（0-双曲的だから）。

作用の極限としてGのTへの作用を得る。

（要約）$\overline{Hom_{FD}} \quad = Hom_{FD}$

$\cup\{G$のあるツリーTへのある作用$\}$

(自明な系)

Gのツリーへの作用で性質を満たすものなし

$\Rightarrow Hom_{FD}$はコンパクト

$(\cdots\cdots \rightarrow$ **Thurston**のコンパクト定理へ)。

(問題)

1) いつ$\{G$のTへの作用$\}$が空集合か？

2) ツリーへの作用の存在からGを「分類」せよ

(答え) ツリーに作用する群の分類：

<u>定理</u> **16 (Bestvina-Feighn) .**

有限表示群Gが**R**-ツリーTに等長的に作用。

作用は$stable$。共通の固定点はない。

$\Rightarrow$

Gは次のような部分群H について分解：

$$0 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow stab(I) \rightarrow 1$$

$I \subset T$はある線分，部分群Cは1または$\mathbb{Z}$.

（系）$Hom_{FD}(G)$がコンパクトでない

$\Rightarrow G$があるツリーTへ作用$\Rightarrow G$は分解

(系１：Thurstonのコンパクト定理)
本質的な球面、シリンダー、トーラスを含まないコンパクト3次元M の基本群
$\Rightarrow$ Hom_{FD}はコンパクト。
(理由）$stab(I)$が、ほとんどアーベル群が言える。
(系２：Bestvina-Paulin-Rips)
Out(双曲群）: 無限　$\Rightarrow$ ほとんど$1, \mathbb{Z}$で分解。
（証明）
$G < Isom(G)$. よって$\rho_0 : G \to Isom(G)$.
$Out(G)$は$Hom(G, Isom(G))$に作用:
$f_i \in Out(G)$に対して
$\rho_i = \rho_0 \circ f_i : G \to Isom(G)$.
$\{\rho_i\}_i$ にGromov-Hausdorff収束を適用：
$\rho_\infty : G \to Isom(T)$を得る。
（注意：G/r_iがツリーTに収束）
Bestvina-Feighnを適用:
Gは$1, \mathbb{Z}$について分解。

（作用が自由な場合）完全な分類あり。

<u>定理</u> **17 (Rips, 1991) .**

有限生成群 G が R-ツリー T に等長的かつ自由に作用。

$\Rightarrow$

G は幾つかの自由アーベル群と幾つかの曲面群の自由積である。

(注意）0)　Bestvina-Feighn, 1995より G が 1または $\mathbb{Z}$ 上分解は分かる。

1) T が単体的ツリーなら G は自由群(Serre).

2) G が3次元多様体の基本群の場合はMorgan-Shalen, 1988. 上の場合はMorgan-Shalen の予想だった。

§3. 離散群の分解

§3.1. Grushkoの定理

<u>定理</u> **18 (Grushkoの定理) .**
G : 有限生成群は

$$G = F_n * G_1 * \cdots * G_m$$

と自由積に分解し次を満たす:

1. F_nは階数nの自由群
   各G_iは自由積分解不能, $G_i \neq 1, \mathbb{Z}$.
2. 分解の一意性:
   $n, m \geq 0$は一意的,
   各部分群G_iはGでの共役を除いて一意的。
3. 任意の自由積分解$G = A * B$を記述:

（**How to show Grushko ?**)

1. スタート：任意の自由積分解 $G = G_1 * G_2$

2. さらにG_iが自由積分解可能なら続ける

3. プロセスが有限回で終結なら結論。

(定義）

有限生成群G

$r(G)$＝生成元の個数の最小値。

• $G = G_1 * G_2$

$\Rightarrow r(G) = r(G_1) + r(G_2)$.

上のプロセスが有限回での終結。

(議論の仕組み）

1. 対象にあるプロセスを定義する。
2. ある「複雑度」を定義。プロセスが進行するごとに複雑度が減少することを示す。
3. 複雑度の下限の存在を示す。プロセスが有限回で終結。

（補足）群の**JSJ**分解の存在にもこの議論を適用。

§3.2 単体ツリーへの群作用、Bass-Serre理論

（Bass-Serre理論）1968/69.

群Gの分解（グラフ分解）

$\Leftrightarrow$

単体ツリーへのGの等長作用

● 固定化部分群がある場合の被覆空間と基本群の理論。ツリーは単連結！

● 単体ツリーへ自由に作用$\Leftrightarrow$　自由群

定理 19 (Serre) .

$SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$がツリーに等長的に作用するなら固定点を持つ。

従って$SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$は分解しない。

（比較）$SL(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_6 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4$.

定理 20 (伊原 1966) .

p：素数。

$G < SL(2,\mathbb{Q}_p)$:トージョンのない離散群。

$\Rightarrow G$は自由群。

(Serreによる別証）リー群$SL(2,\mathbb{Q}_p)$の「対称空間」はツリー$T \Rightarrow G$はTに自由に作用$\Rightarrow$ 自由群。

(比較）

$G < SL(2,\mathbb{R})$:トージョンのない（有限生成）離散群。

$\Rightarrow \mathrm{H}^2$に離散的に作用$(PSL(2,\mathbb{R}) = Isom(\mathrm{H}^2))$

$\Rightarrow G$は自由群か閉曲面の基本群。

§3.3. JSJ分解

（3次元多様体論からの事実）

M：3次元コンパクト多様体

G：その基本群

● 本質的な球面、シリンダー、トーラス　$\subset M$

$\Leftrightarrow$

Gの$1, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$についての分解

● Mの本質的な球面は全て記述できる：

$S_1, \cdots, S_n \subset M$（有限個しかない）

$\Leftrightarrow$

Mの連結和分解：

$M = M_1 \sharp M_2 \sharp \cdots$

$\Leftrightarrow$（ファン・カンペン）

GのGrushkoによる自由積分解.

(How about トーラス　$\subset M$?)

M: 3次元コンパクト多様体。本質的球面なし。

（ウソ）$T_1, \cdots, T_n \subset M$　有限個しかない

(例)

$M=$曲面$\Sigma \times S^1$.

トーラス＝Σ 上の$^\forall$閉曲線 $\times S^1 \subset M$.

（定義）

ザイフェルト空間＝Cone特異点をもつ曲面上のS^1バンドル

定理 21 (JSJ分解:Jaco-Shalen,Johannson1977)

M:*3*次元コンパクト多様体。本質的球面なし。

$\Rightarrow$

$\exists T_1, \cdots, T_n \quad \subset M$: 本質的トーラス　$s.t.$

$M - \{T_i\}$の連結成分は

1. ザイフェルト空間　または

2. 本質的トーラスなし（*atoroidal)*

（補足）

1) このような分解は一意。

2)Mの本質的トーラスはザイフェルトの中にホモトープ。

3) 基本群Gの$\mathbb{Z}^2$上のグラフ分解を与える

（ファン・カンペン）

（問い）

atoroidal な部分は何か？

$\Rightarrow$ ？

双曲多様体

（部分解）

JSJ分解のトーラスがあれば正しい **(Thurston)**

（双曲予想 **Thurston)**

M:本質的球面、本質的トーラスなし。基本群無限なら双曲的。

$(G$のJSJ分解$)$

（問）G : 有限表示群の分解（とくに$\mathbb{Z}^n$）を全て記述できるか？

（答え) できる。

<u>定理</u> **22** *(JSJ分解: Rips-Sela, Dunwoody-Sageev, Fujiwara-Papasoglu)*
G:有限表示群の$\mathbb{Z}^n$についてのJSJ分解が存在:
$\exists \mathbb{Z}^{n_1}, \cdots, \mathbb{Z}^{n_i} < G\ s.t.$
これについてのGのグラフ分解は
全ての$G = A *_{\mathbb{Z}^n} B$を記述。

(補足）

1) 分解は一意。よって$Out(G)$で不変。

2) 分解のピースの一つのタイプはザイフェルト。もう一つのピースは$\mathbb{Z}^n$分解不能ピース。

3) $Hom_{FD}(G,$ 双曲空間$)$のコンパクト化とGの$\mathbb{Z}^n$分解との関係。

- 群のJSJの応用

自由群GのTarski予想の解決(Sela, 2002):

Gのあるモジュライ（$=G$についての全ての正しい命題）をJSJ分解をつかってコンパクト化した。