離散群と双曲幾何

– 幾何学的群論のガイドツアー –

Surveys in Geometry, special edition (落合卓四郎先生還暦記念)

東京大学数理科学研究科. 2003 年 10 月 29 日〜11 月 1 日

藤原 耕二 (東北大学 数学)

fujiwara@math.tohoku.ac.jp

http://www.math.tohoku.ac.jp/~fujiwara/

1 パノラマ

Gromov の二つの大論文 [G;hyp], [G;asymp] に刺激されて生まれた一連の仕事を指し示して幾何学的群論 (geometric group theory) という言葉が使われ始めたのは、最近 10 年くらいのことである。タイトルの中の離散群として考えているものは、リー群のような群でなく多くの場合、可算個の元を持った群で、例えば多様体や複体の基本群などは良い例である。幾何学的群論とは一言で言うなら離散群の性質を幾何学的、トポロジー的な方法で研究する分野と言える。その意味では、Gromov 以前にもそのような結果はいくつもあった。初めにそれらの頂上を幾つか見てみよう。講演を通して、それらをめぐる「点と線」まで伝えられればと思っている。

この原稿は Surveys in Geometry での講演の予稿として書いているが、話の流れを損なわないよう 1 回の講演では話しきれない分量を含んでいる。証明などは殆ど書かなかった。強調したかったプリンシプル (ルールというよりは、むしろ実用的な指針というような意味で) は次のようなものである。

1. 双曲幾何と離散群
2. 2 次元、3 次元多様体と離散群
3. 部分多様体と離散群の分解

1.1 Dehn の仕事

いつものことだが Dehn の仕事から始める。1910 年頃 M.Dehn は有限生成群に関する三つの基本的な「決定問題」を与え、閉曲面の基本群について肯定的に解いた。一般の群では否定的に解かれている（つまり決定できない）(P.S.Novikov,1954)。決定問題の意味することを正確に述べるには準備が必要なのでここではしない。およその意味として、肯定的に解けるとは抽象的に決定できることが示せるというだけでなく、具体的な手続きを示せることである。

1. 語の問題 (word problem):生成元の積で与えられた任意の元 $g \in G$ が単位元かを有限回の操作で決定する方法を与えよ。
2. 共役問題 (conjugacy problem):G の任意の二元 g, h が G の中で共役であるかを有限回の操作で決定する方法を与えよ。
3. 同型問題 (isomorphism problem): 与えられた二つの群が同型かを有限回の操作で決定せよ。

Dehn はこの 3 つの問題で、その後 100 年の（組み合わせ）群論の研究の指針を与えたというだけでなく、その解決の過程で幾つかの重要な概念も導入している。それを現代的な立場から述べよう.

まず、距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) に対して、写像 $f : X \to Y$ と定数 $K \geq 1, \epsilon \geq 0$ が存在して次の (1),(2) を満たす時、(X, d_X) と (Y, d_Y) は擬等長 (quasi-isometric) という。擬等長性は距離空間に同値関係を定める。

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して、

$$\frac{d_X(x,y)}{K} - \epsilon \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x,y) + \epsilon.$$

(2) 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在し $d_Y(y, f(x)) \leq \epsilon$.

次に語距離を定義する。(G, S) を有限生成群 G と、ある有限生成元集合 S の組とし $S = S^{-1}$ とする。語 (word) とは S の元の有限列 w のことで、その長さを $l(w)$ と書く。語 w が自然に表す G の元を $\bar{w}$ と書く。G 上の関数 l_S を次で定義しよう: 単位元 e_G については $l_S(e_G) = 0$ とし、e_G でない元 g に対しては次で定義する。

$$l_S(g) = \min_{\{w | w = g\}} l(w).$$

G 上に語距離 (word metric) を

$$d_S(g, h) = l_S(g^{-1}h)$$

と定義する。

有限生成群の Cayley グラフ (Cayley, 1878. 有限群の場合) $\Gamma=\Gamma(G,S)$ を次のように定義する。Γ の頂点は G の元全体。頂点 v と生成元 s に対し、v を始点、$vs\in G$ を終点とする有向辺 (v,s,vs) を対応させる。これは逆向きの有向辺 (vs,s^{-1},v) と共に、v と vs を結ぶ 1 つの辺を定めるとする。Γ は正規グラフになる。正規グラフとは各頂点での位数が一定のグラフである。

例えば標準的な生成元を考えれば、$\mathbb{Z}^n$ の Cayley グラフは $\mathbb{Z}^n$ 格子、階数 n の自由群の Cayley グラフは、次数が $2n$ の正規ツリーである。

各辺の長さを 1 として定義される Γ 上の測地距離は、頂点（すなわち G) 上で語距離 d_S に等しい。任意の生成元集合 S,S' について $\Gamma(G,S)$ と $\Gamma(G,S')$ は擬等長である。さらに擬等長性は有限生成群全体に同値関係を定めることが分かる。

G の Γ への等長作用を次で与える:

$$(g,v)\mapsto g^{-1}v,(g,(v,s,vs))\mapsto(g^{-1}v,s,g^{-1}vs).$$

Dehn はフックス群 (ジーナスが 2 以上の閉曲面の基本群) と双曲平面 $\mathbf{H}^2$ が擬等長であることに気がついて、双曲幾何を曲面群に関する決定問題の解決に本質的に使っている。これを一般の状況に拡張した観察については後で述べる。

1.2 Stallings のエンド定理

X を局所コンパクトで連結な距離空間とする。任意のコンパクト部分集合 $K\subset X$ に対して、$e(X,K)$ を $X\backslash K$ の非有界な連結成分の個数とする。

$$e(X)=\sup_K e(X,K)$$

と定義し、X のエンドの個数と呼ぶ。

例えば、$e(\mathbf{R})=2, e(\mathbf{R}^n)=1(n\geq 2)$. T が各頂点の次数が 3 以上のツリーなら $e(T)=\infty$.

プロパーな測地空間のエンドの数は擬等長不変である。従って Cayley グラフ $\Gamma(G,S)$ のエンドの個数は生成元集合 S によらない。それを有限生成群 G のエンドの個数と呼び $e(G)$ と書く。これは群の擬等長不変量である。$e(G)$ は $0,1,2,\infty$ のいずれかであることが知られていて、$e(G)=0$ の

必要十分条件は G が有限群であることである。一般的な場合は $e(G)=1$ であると考えられ特に分類はない。例は $e(\mathbb{Z}^n)=1(n\geq 2)$.

J.R.Stallings は $e(G)=2,\infty$ である G の代数的分類を与えた。

定理 1.1 (Stallings,1968[St]). *1.* $e(G)=2$ の必要十分条件は G が $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含むこと。

2. $e(G)=\infty$ である必要十分条件は次のいずれかが成り立つこと。

(a) $G=A*_C B$ と書け、C は有限群で $|A/C|\geq 3, |B/C|\geq 2$ を満たす。

(b) $G=A*_C$ と書け、C は有限群で $|A/C|\geq 2$ を満たす。

1.3 Mostow 剛性

Mostow らの剛性定理によれば、基本群が同型な二つのコンパクトな局所対称空間は等長である。ここでは双曲幾何との関連を強調して、Rank-1 の場合だけ述べる．より一般に、コンパクトでなくても体積が有限なら同様の結論が成り立つ (Rank-1 の場合は Mostow-Prasad, Rank-2 以上の場合は Margulis).

定理 1.2 (Mostow. 1973). M,N をコンパクトな双曲多様体とし、次元はともに 3 以上とする。このとき、基本群 $\pi_1(M)$ と $\pi_1(N)$ が同型なら M と N は等長。

Rank-2 以上の場合は、Ballmann-Gromov-Schroeder[BGS] による Mostow 剛性の拡張がある。これは、Hadamard 多様体、より一般には CAT(0) 幾何の話で、双曲幾何からは逸れるが関連する著しい結果という意味で述べる。

定理 1.3 (Ballmann-Gromov-Schroeder.1981). M をコンパクトで非可約な局所対称空間で、*Rank* は 2 以上とする。N をコンパクトな C^∞-リーマン多様体とし、断面曲率が $K\leq 0$ とする。M,N の体積は等しいとし、$\pi_1(M),\pi_1(N)$ が同型なら M,N は等長。

上で N も Rank が 2 以上のコンパクトで非可約な局所対称空間のときが、Mostow のオリジナルの剛性定理である。

対して Rank-1 では次のような現象がある。

定理 1.4 (Farrell-Jones[FJ1]). 任意の定数 $\delta>0$ と各 $n\geq 5$ について次を満たす n 次元のコンパクトなリーマン多様体 M,N が存在する。

1. M, N は位相同型だが微分同型ではない。
2. M の断面曲率 $K_M = 1$, N の断面曲率 K_N について

$$-1-\delta \leq K_N \leq -1.$$

上で N には断面曲率 $= -1$ のリーマン計量は入らないことに注意（もし入れば、Mostow 剛性より M, N は等長、特に微分同型)。テクニックは全く異なるが、類似の性質をもつコンパクトなリーマン多様体 N の Gromov-Thurston による別の構成もある (1987): N に双曲計量は入らないが、上の曲率の条件 2 を満たす計量は入る。議論はリーマン幾何と Mostow 剛性により、N の次元は 4 以上ならよい (cf. 金井雅彦氏の解説 [SiG86]). なお、次元が 3 の場合は上のような例はないと思われる。なぜなら、Thurston の双曲化予想が正しいなら N には双曲計量が入るので M と N は微分同型になるからである。

1.4 Gromov の増大度定理

有限生成群 (G, S) に対して、増大度関数 (growth function) を

$$\gamma_S(n) = \sharp\{g \in G | l_S(g) = n\}(n \in \mathbb{N})$$

と定義する. n のある多項式 $p(n)$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\gamma_S(n) \leq p(n)$ の時、G は多項式増大度 (polynomial growth) を持つという。定数 $C > 0$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\exp(Cn) \leq \gamma_S(n)$ の時、G は指数増大度 (exponential growth) を持つという。増大度は G の擬等長類だけによる。コンパクトなリーマン多様体の曲率と基本群の増大度に関する結果の代表例として次がある。

定理 1.5 (J.Milnor, 1968). コンパクトで負の断面曲率を持つリーマン多様体の基本群は指数増大度を持つ。

より強い形の結果に次がある。これはひとつの「剛性定理」といえるかもしれない。

定理 1.6 (Avez, 1970). M をコンパクトなリーマン多様体で断面曲率が ≤ 0 とする。M がフラットでなければ、基本群は指数増大度を持つ。

有限生成のベキ零群は多項式増大度を持ち、その多項式の次数も H.Bass によって代数的に計算されている (1972, Proc.LMS). その逆を主張する次の Gromov の定理 [G;poli] はいまだに新鮮さを失わない高い頂きである。

定理 1.7 (Gromov, 1981). 有限生成群Gが多項式増大度を持つことと、Gに有限指数の冪零部分群が存在することは同値。

増大度が擬等長不変であることは述べた。この定理を通して、有限指数の冪零部分群の存在は群の擬等長不変な性質であることが分かる。

群が多項式増大度も指数増大度も持たない時、中間増大度 (intermediate growth) を持つという。有限生成群で中間増大度を持つ例が知られているが (R.I.Grigorchuk,1983)、有限表示群では例が知られていない。

1.5 Gromov のプログラム

Gromov の二つの論文の一つ、双曲群については次章で述べるが、もう一つの論文 [G;asymp] で、Gromov は次のようなプログラムを提唱したといわれている: 「有限生成群を擬等長によって分類せよ」。

その観点からこの章を振り返ってみる。まず Stallings のエンド定理は、エンドの数という擬等長不変量を群の分解という代数的性質に言い換えているという意味で、Gromov のプログラムの雛形的な定理とみなせる。次に Gromov の増大度定理も、増大度という擬等長不変量と有限指数ベキ零部分群を含むという代数的な性質の同値性を示している。例えば次のようなことも容易に分かる。

系 1.1. Gを有限生成群とし、ユークリッド平面$\mathbf{E}^2$と擬等長とする。このとき有限群Fが存在し次の完全系列を満たす。

$$1 \to F \to G \to \mathbb{Z}^2 \to 0.$$

Gにトージョンがなければ、$G = \mathbb{Z}^2$である。

議論は、$\mathbf{E}^2$は 2 次の多項式増大度を持ちGはそれと擬等長より同じく 2 次の増大度を持つ。よって Gromov の定理よりベキ零群Nを有限指数で含み、Nも 2 次の増大度を持つ。先に述べた Bass の計算よりNは「ほとんど」$\mathbb{Z}$か$\mathbb{Z}^2$である。エンドの個数の擬等長不変性を使えば$\mathbb{Z}$はありえない。よってN、従ってGはほとんど$\mathbb{Z}^2$である。これを正確に言えば結論になる。

これらの例からも分かるように、「代数的性質 $\Rightarrow$ 擬等長的性質」は易しく、逆の向きが難しいことが多い。時間があれば Mostow 剛性についてもこの観点から見てみたい。

定理 1.8 (Sullivan,1978-Gromov). 有限生成群 H と $\mathbf{H}^3$ が擬等長だとする。このときある準同型 $g : H \to Isom(\mathbf{H}^3)$ が存在し $Ker(g)$ は有限群で $Im(g)$ は一様格子群になる。

この結論をその前のユークリッド平面の場合と比較してみると興味深い。ユークリッド平面と擬等長な群は本質的には $\mathbb{Z}^2$ だけであるのに対して、$\mathbf{H}^3$ の場合は全ての一様格子群が 1 つの擬等長類をなしている。その意味で代数的な剛性は弱いと言える。

2 双曲群

曲面群における決定問題に関する Dehn の仕事は、後に van Kampen(1933)、R.Lyndon(1966) によって円板図 (diagram) を使った議論として整備され、少重複関係式群 (small cancellation group) の理論として一般化された [LS]。

それらの著しい一般化として、1980 年代初頭、Gromov[G;hyp] が測地空間と有限生成群に「双曲性」を定義し多くの重要な性質を示したことが、幾何学的群論の始まりであることは既に述べた。

双曲性の組み合わせ的側面は small cancellation 群、幾何学的側面は双曲多様体、またはより一般的な対象として単連結なリーマン多様体でその断面曲率 K がある負の定数 c について $K \leq c$ を満たすものに起源を持つといえる。

ところで、単連結なリーマン多様体で $K \leq 0$ を満たすものを Hadamard 多様体と呼ぶ。断面曲率の非正性を測地空間に拡張した概念として CAT(0) 空間があるが、これも [G;hyp] で導入され以降活発な研究がある。詳しい取り扱いは [BrHae] を見よ。双曲空間、双曲群については和書 [大鹿] もある。

2.1 δ-双曲空間

(X, d) を完備測地空間とする。ある定数 $\delta \geq 0$ と X の三角形 $\triangle$ について、任意の一辺が他の二辺の和集合の δ-近傍に含まれる時、$\triangle$ は δ-細い (thin) と言う。ある定数 $\delta \geq 0$ が存在して、X の任意の測地三角形が δ-細いとき、X は δ-双曲的 (hyperbolic)、または単に (Gromov-) 双曲的 ((Gromov-)hyperbolic) という。

双曲性は測地空間の擬等長類で不変である (証明には下の命題が必要)。例えば、ツリーは (0-) 双曲的。単連結な完備リーマン多様体に、ある定数 $c > 0$ が存在して断面曲率が $-c$ 以下なら双曲的。従って n 次元双曲空間 $\mathbf{H}^n$ は双曲的。次元が 2 以上の Euclid 空間は双曲的でない。

連結な $I \subset \mathbf{R}$ から X への連続写像 $f : I \to X$ を道とよぶ。$K \geq 1$、$\epsilon \geq 0$ を定数とする。弧長パラメータを持つ道 α が (K, ϵ)-擬測地線 (quasi-geodesic) とは、任意の t、s について次が成立することをいう:

$$|t - s| \leq Kd(\alpha(t), \alpha(s)) + \epsilon.$$

双曲空間の擬測地線には次に述べる「安定性」が成立することは重要な事実である。これは Euclid 平面では不成立であることに注意。

命題 2.1. 任意の定数 $\delta, \epsilon \geq 0, K \geq 1$ に対して、ある定数 $C(\delta, K, \epsilon) \geq 0$ が存在して次を満たす*:*
任意の δ-双曲空間 X の任意の (K, ϵ)-擬測地線は、X のある測地線の C-近傍に含まれる。

Hadamard 多様体と同様に、無限測地線の漸近的 (asymptotic) 同値類集合として、双曲空間 X の理想境界 $X(\infty)$ が定義される。ここで、二つの (弧長パラメータをもつ) 測地線 $\alpha, \beta : [0, \infty) \to X$ が漸近的とはある定数 c が存在して全ての t について次が成立すること。

$$d(\alpha(t), \beta(t)) \leq c.$$

これはプロパーな X のコンパクト化 $\bar{X} = X \cup X(\infty)$ を与える。X の等長変換は $\bar{X}$ の同相変換に拡張する。

2.2 双曲群

有限生成群 (G, S) の Cayley グラフが Gromov-双曲的な時、群 G を双曲群 (word-hyperbolic group) と呼ぶ。測地空間の双曲性は擬等長不変なので、群の双曲性は生成元に依存しない。双曲群は常に有限表示になる。定義から直ちに分かる例として、有限群、有限生成自由群（特に $\mathbb{Z}$) は双曲群である。$\mathbb{Z}^2$ は双曲群でないが、一般にそれを部分群として含む群は双曲群でないことが知られている。

群 G の距離空間 X への等長作用が不連続 (properly discontinuous) とは任意の点 $x \in X$ と任意の定数 $R > 0$ について、次を満たす元 g の個数

が有限であることをいう:

$$\{g \in G | d(x, gx) < R\}.$$

次に述べる事実は重要である。1950 年代にロシアでは知られていたという。前章で触れた Milnor の論文 (1968) にも記述がある。既に述べたようにフックス群の双曲平面 $\mathbf{H}^2$ への作用の場合は Dehn による。

定理 2.1. 群 G が測地空間 X に等長的、不連続に作用していて、X/G がコンパクトなら、G は有限生成で X と G（正確にはその *Cayley* グラフ）は擬等長。従ってコンパクトなリーマン多様体 M の普遍被覆と $\pi_1(M)$ は擬等長。

この事実よりコンパクトな負曲率リーマン多様体（特に種数 2 以上の閉曲面）の基本群は双曲群であることが分かる。

有限群、または $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む双曲群を初等的 (elementary) と呼ぶ。任意の初等的でない双曲群は、階数 2 の自由群を部分群として含み、指数的増大度を持つことが知られている。

双曲群の語の問題、共役問題、位数 2 の元を含まない場合の同型問題 (Z.Sela,1995) は肯定的に解かれている。

2.3 等周不等式

古典的な等周不等式を復習する。双曲平面 $\mathbf{H}^2$ に単純閉曲線 c を考え、その長さを $l(c)$ とし、それが囲む有界領域の面積を $A(c)$ とする。ある定数 K が存在して任意の c に対して次が成立。これを称して線形の等周不等式という。

$$A(c) \leq Kl(c).$$

ユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$ において同様のことを考えると 2 次の等周不等式が成り立つ。すなわち、任意の c について、

$$A(c) \leq \frac{1}{4\pi}(l(c))^2.$$

以下、群で等周不等式を考えよう。G を有限表示群として、その表示が与えられたとする。

$$G =< S | R > .$$

有限集合 S が生成元集合で有限集合 R が関係式集合である。$F(S)$ を S の生成する自由群とし、その中で集合 R の生成する正規部分群を $N(R)$ とすれば、群の表示の定義より $G \simeq F(S)/N(R)$ である。すなわち自然な全射準同型

$$F(S) \to G$$

の核が $N(R)$ である。さて $N(R)$ の定義より、各元（またはこの場合、自由群 $F(S)$ の元なので語と呼んだほうが良いかもしれない）$w \in N(R) < F(S)$ は、R の元の $F(S)$ 内での共役の有限個の積でかける：

$$w = r_1^{a_1} \cdots r_n^{a_n}.$$

ただし、$r_i \in R, a_i \in F(S)$ で、$r_i^{a_i} = a_i r_i a_i^{-1}$ のこと。上の等号は $F(S)$ での等号であることに注意。このような表示の長さ n の最小値を $A(w)$ と書くことにする。ある定数 K が存在して、任意の $w \in N(R)$ について

$$A(w) \leq Kl(w)$$

が成り立つとき、G は「線形の等周不等式」を満たすという。ただし $l(w)$ はワード w の長さである。$A(w) \leq K(l(w))^2$ ならば、「2 次の等周不等式」を満たすなどという。

定理 2.2. 有限表示群 G について次は同値。

1. G は双曲群。
2. G は線形の等周不等式を満たす.

つまり群論において線形の等周不等式は双曲性を特徴付けている。しかし 2 次の等周不等式を満たす群を特徴付けることは成功していない。ただしオートマチック群の呼ばれる群のクラスがあり、それは 2 次の等周不等式を満たすことが知られている。一般に双曲群はオートマチック群である。オートマチック群については [Ep] を見よ。

2.4 Gromov-Hausdorff 収束と Bestvina-Paulin-Rips の定理

双曲群について、Gromov 論文以後の最も良い定理の一つとして次がある。

定理 2.3 (Bestvina-Paulin-Rips). G を双曲群とする。G の外部自己同型群 $Out(G)$ は無限群なら、G は有限部分群か、ほとんど $(virtually)\mathbb{Z}$ な部分群 C について分解する。すなわち $G = A *_C B$ または $G = A*_C$ と（非自明に）書ける。

ただし、一般にある群 A が「ほとんど何々」とはその性質「何々」を満たす部分群 $B < A$ が有限指数で存在することを言う。上の場合、C に $\mathbb{Z}$ が有限指数で含まれることになる。

この定理は離散群の代数、幾何と低次元トポロジー、双曲幾何の緊密な「点と線」の具現としても興味深い。（境界のない）コンパクトな負曲率多様体 M の基本群 G が双曲群であることは述べた。さらに M を双曲多様体としてみよう。このとき G の外部自己同型群の「大きさ」は M の次元に大きく依存する。すなわち次元が 2 なら無限（写像類群）で、3 以上なら有限である。さらに 3 次元でも M がコンパクトでないときには別の現象があり、それは 3 次元双曲多様体の基本群の $SL(2, \mathbf{C})$ 表現のあるモジュライのコンパクト性に関する Thurston, Morgan-Shalen による仕事として結実している。これは次章「群の分解」の観点からもおもしろいので可能なら講演で触れたい。

上の定理の証明では Gromov-Hausdorff 位相が本質的な役割を果たした。定義だけ述べておく。まず、コンパクトな距離空間 (Z, d) の閉集合 $A, B \subset Z$ の距離 (Hausdorff 距離と呼ぶ) を次で定義する。

$$d_H^Z(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 | A \subset N_\epsilon(B), B \subset N_\epsilon(A)\}.$$

ここで、$N_\epsilon(A)$ は A の ϵ 近傍を表す。Gromov はこれは拡張して、任意のコンパクト距離空間 A, B に距離を次で定義した。Gromov-Hausdorff 距離と呼ばれる.

$$d_{GH}(A, B) = \inf_Z \{d_H^Z(A, B) | A, B \subset Z\}.$$

コンパクトな距離空間全体 $\mathcal{C}M$ は Gromov-Hausdorff 距離について完備になる。リーマン幾何における有限性定理や、関連して Alexandrov 空間の幾何学などがここから生まれた (cf. 酒井隆氏、深谷賢治氏の解説 [SiG86]. Alexandrov 空間については [SiG01]). Gromov-Hausdorff 距離の導入は Gromov が数学にした最も大きな貢献の一つだろう。

3 離散群の分解

対象をより小さなピースに分解することは最初にするべき試みの一つだろう。関連してすべきことは二つある:

1. 分解不能なピースの性質を調べる。
2. 分解の全体=モジュライを調べる。

この観点から離散群を見てみる。

3.1 Grushko の定理

Grushko の定理 [LS] によれば、任意の有限生成群 G は、

$$G = F_n * G_1 * \cdots * G_m$$

と自由積に分解し次を満たす:

1. F_n は階数 n の自由群、各 G_i は自由積分解不能で単位群でなく $\mathbb{Z}$ に同型でもない。
2. この分解は次の意味で一意的である:
   $n, m \geq 0$ は一意的で、各部分群 G_i は G の元での共役を除いて一意的。
3. この分解は任意の自由積分解 $G = A * B$ を次の意味で記述する:
   $G_1, \cdots, G_m$ を適当に並べ替え、それらを適当に G の中で共役を取ったものを $G'_1, \cdots, G'_m$ とすれば (これらは A, B による)、ある $0 \leq n_1 \leq n, 0 \leq m_1 \leq m$ が存在して次が成立:

$$A = F_{n_1} * G'_1 * \cdots * G'_{m_1}, B = F_{n-n_1} * G'_{m_1+1} * \cdots * G'_m.$$

つまり Grushko 分解は一つの分解で自由積分解の全て、すなわちモジュライを記述している。

ところで上の主張 1 だけでも自明でないことに注意。定理の証明では与えられた群 G が自由積分解可能だとし、任意に自由積分解 $G = G_1 * G_2$ を取り、さらに G_i が自由積分解可能なら続けるというプロセスを考える。このプロセスが有限回で終結するなら主張 1 が従う。実際、プロセスの終結は次のように保証される。有限生成群 G の生成元集合（一意とは限らない）の元の数の最小値を $r(G)$ としよう。このとき任意の自由積分解 $G = G_1 * G_2$ について、G_i は有限生成で次が成立することが知られて

いる。

$$r(G) = r(G_1) + r(G_2).$$

これより、上のプロセスが有限回での終結するのは明らかだろう。

この論理の仕組みは、組み合わせ群論など (低次元トポロジーなど他にもいろいろあると思うが) の議論でよくあるパターンである。

1. 対象に、あるプロセスを定義する。
2. ある「複雑度」を定義し、プロセスが進行するごとに複雑度が減少することを示す。
3. 複雑度の下限の存在を示すことにより、プロセスが有限回で終結することを保証する。

実際、後で述べる群の JSJ 分解の存在にもこのような議論が適用される。

3.2 Bass-Serre 理論

上で群の自由積について述べたが、その一般化として群の融合積、HNN 拡大がある。群の融合積、HNN-拡大を有限回繰り返して群 G が得られる時、その逆操作は G のグラフ分解 (graph decomposition) を与えると言われる。Bass-Serre 理論によれば、G の任意のグラフ分解は G のツリーへのある等長作用と同等である [Se].

どのような群が非自明なグラフ分解を持つかは、基本的かつ重要な問題である。この問いを Bass-Serre 理論で翻訳するなら、どの群がツリーに非自明に（この場合は共通の固定点を持たずに）作用するか、という問題になる。Serre は次を示した。

定理 3.1. $SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$ がツリーに等長的に作用するなら固定点を持つ。従って $SL(n,\mathbb{Z}), n \geq 3$ は分解しない。

対照的に $SL(2,\mathbb{Z})$ は次のような有名な分解を持つ。

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_6 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_4.$$

ただし $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ である。より一般にランクが 2 以上の単純なリー群 L(例えば $SL(n,\mathbf{R}), n \geq 3$) の格子部分群 G（すなわち離散群でハール測度について L/G は有限測度) は「カズダンの性質 T」と呼ばれるものを満たし、そのような群は分解しないことが知られている。

群の分解を幾何学的に把握したいなら、多様体 M^n における余次元 1 の部分多様体 N の存在と関連させるのがよいだろう。ファンカンペンの定理などによれば、M の基本群は N の基本群について分解すると考えてよい。より一般の状況で言うなら、部分集合 $Y \subset X$ が局所的にセパレーティングなら、$\pi_1(X)$ の $\pi_1(Y)$ に関する分解が期待できる。

以上より $\pi_1(M)$ の分解可能性は N の存在と関係が深いのが分かる。2 次元においては、この観察は自明すぎて魅力にかけるが、3 次元においては 3 次元多様体論の重要な一部である。それを次で見る前に、余次元 1 の N の存在は $H_{n-1}(M)$ の非自明性、すなわち $H_1(M)$ の非自明性と関連していることに注意して、上のセールの定理との関連事項として、$SL(n, \mathbb{Z})$ の H_1 が自明である事実 (松島, 村上,Borel など) を指摘しておく。

3.3 JSJ 分解

3 次元多様体論と幾何学的群論の関連は著しい。3 次元多様体論と双曲幾何については相馬輝彦氏の講演もあるので (cf. [相馬])、ここでは概略を述べる。3 次元閉多様体 M の基本群 G の自由積分解は M の連結和分解で引き起こされる (Kneser 予想の J.R.Stallings による証明, 1965). 連結和分解しない 3 次元多様体を素 (prime) 多様体という。M の有限個の素多様体への連結和分解が存在し、一意的であるが (一意性は Milnor, 1962)、これは Grushko の定理が G に導く自由積分解と同等である. 連結和分解は球面についての分解と見れば、前に述べた設定では球面が余次元 1 の部分多様体 N にあたる。

部分多様体 $N \subset M$ が本質的 (essential) とは N の基本群が M の基本群の部分群になっているときを言う。M の中の余次元 1 の部分多様体 N（すなわち曲面）として、球面の次にトーラスを考えるのは自然だろう。実は、素な 3 次元閉多様体 M の全ての本質的トーラスを記述することが成功していて、M の JSJ 分解と呼ばれる (1977). JSJ とは、理論の構築者 Jaco-Shalen, Johannson の頭文字である。

JSJ 分解によれば、M は有限個の互いに交わらない埋め込まれたトーラスによって分解され、それぞれのピースはザイフェルト空間と呼ばれるトーラスを豊富に含む部分であるか、アトロイダルと呼ばれるトーラスを含まない部分である。ここでザイフェルト空間とは 2 次元オービフォールド Σ 上の S^1 束のことであり、そのトポロジー、幾何はよく分かっている。特にその中の本質的なトーラスは Σ 上の単純閉曲線とファイバーの

直積として現れる。さらに JSJ 分解の主張によれば、M の本質的なトーラスは全てザイフェルト空間の中のトーラスにホモトープであり、その意味で M の全ての本質的トーラスは記述されている。

一方、サーストンの幾何化予想によればアトロイダルな部分は双曲的である。このように先に述べた作業指針 1 の「分解できないピースの解析」は（予想も含めて）満足がいく程度に達成されている。作業指針 2 のモジュライの記述は JSJ 分解自身がそれにあたる。全ての本質的トーラスの記述をしているので、自然な帰結として例えば M の位相同型変換は JSJ 分解を保つ。

結局、Thurston の双曲幾何化予想で残っている部分は素で本質的トーラスを含まない境界のないコンパクト 3 次元多様体（で基本群が無限だが $\mathbb{Z}$ に同型でない）に関してである。つまり素多様体への連結和分解も、本質的トーラスによる JSJ 分解も自明で、かつザイフェルト空間でもない場合である。ただし境界のある場合や、より一般に（トーラスとは限らない）本質的な曲面を含む Haken と呼ばれる場合には双曲的であることが分かっている (cf. [小島]).

3 次元多様体 M の JSJ 分解を基本群について見てみると、M の基本群が、トーラスの基本群 $\mathbb{Z}^2$ に関してグラフ分解していることが分かる。補足すると、境界のあるコンパクトな 3 次元多様体 M を考えるときは、部分多様体として本質的なシリンダーを考える必要もあり、基本群の部分群では $\mathbb{Z}$ が対応する。M の連結和分解まで合わせて考えると、M の基本群に関しては単位群、$\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ についてのグラフ分解を与えている。大事な点は、3 次元多様体については（予想まで含めれば）ここまで分解すればそのトポロジーと幾何を満足いく程度に理解できるということである。

一方、一般の有限表示群 G について、$\mathbb{Z}^n (n \geq 0)$ に同型な部分群に関する全ての分解を記述する一つのグラフ分解 (G の JSJ 分解と呼ばれる) が存在することが知られている (E.Rips-Z.Sela[RS],M.Dunwoody-M.Sageev, K.Fujiwara-P.Papasoglu. 日本語解説として [藤原 2])。これは Grushko の定理の著しい拡張とも考えられるし、3 次元多様体の JSJ 理論の群論での一般化された対応物とも思える。3 次元多様体において JSJ 理論が重要だったように、有限表示群の理論において今後 JSJ 分解の果たす役割は大きいだろう。指針に従うなら、次は有限表示群の JSJ 分解の一つ一つのピース（これはグラフ分解では頂点群として現れる）を理解したいが、これについては 3 次元多様体との一定のアナロジーが成立していておよそ次のようになる。

1. ザイフェルト空間の基本群を高次元化した群
2. $\mathbb{Z}^n, n \geq 0$ で分解しない群

となる。2については3次元多様体の場合は双曲的である（予想）わけだが、有限表示群ではそのような特徴付けはない。分解しないという意味で剛性の強い部分と考えられている。いくつかの群にJSJ分解を適用した結果を述べると、曲面群の場合は曲面群自体が一つのピースをなし、上の分類では1に入る。現象的にみるなら曲面群は剛性の少ない群であることとも辻褄のあった解釈である。一般の双曲群にJSJ分解を適用すると、1の部分は高々曲面群（それも一般的には境界のある曲面の基本群なので、群としては自由群。しかし曲面の構造が記憶されている）であると特徴付けられ、結局、JSJ分解は双曲群を曲面群とそれ以外の部分に分割する。JSJ分解の性質より、これらの分解が群の任意の外部自己同型で保たれるのが重要である。3次元の閉双曲多様体の基本群は双曲群だが、これにJSJ分解を適用するとやはり分解しないで（つまりそれ自身が一つのピース）、それは2に属する。

3次元多様体の基本群に適用した場合は、古典的に多様体で得られていたJSJ分解が基本群に導く分解と同等である。しかし群のJSJ分解の多様体への反映は他にはあまり知られていない。例えば4次元多様体の基本群のJSJ分解が、多様体の中で一定の実現をされるかですら不明である。知られている結果をランダムに挙げるなら、リーマン多様体で断面曲率が ≤ 0 の場合は基本群のJSJ分解は多様体で幾何学的に実現される。それは次の定理によるところが大きい。

定理 3.2 (Lawson-Yau.1972). M を閉じたリーマン多様体とし、断面曲率 $K \leq 0$ とする。このとき次は同値。かつトーラスと自由アーベル群は対応している。

1. M に全測地的でフラットな n 次元トーラスが存在.
2. $\pi_1(M)$ がランク n の自由アーベル群を部分群として含む。

これは断面曲率 ≤ 0 を測地空間に拡張して定義されるCAT(0)空間でも成立している [BrHae]. リーマン多様体の場合と合わせてフラットトーラス定理と呼ばれる。この定理を使って M の基本群のJSJ分解を M の中に実現すれば、結局 M がいくつかの（高次元）トーラスで分解され、それぞれのピースは高次元化されたザイフェルト空間かアトロイダル（トーラスを含まない）な部分になることが知られている (Leeb-Scott, 2000).

4 謝辞

落合卓四郎先生の還暦を嬉しく思い、それを記念する Surveys in Geometry で講演することを光栄に感じます。修士課程で先生の指導の下 [BGS] を読んだ事はその後の自分の研究生活に大きな良い影響があり、それを含め先生に感謝します。

文献表からも読み取れるように、Surveys in Geometry が日本の幾何学研究、とくに若い研究者の育成に甚大な効果があったことを書き留めます。数学では知識を共有し伝えるだけでは十分でなく、創造的な次世代の形成が必要であり、そのために Surveys in Geometry がオープンかつ未来を向いていたことを強調したいと思います。そのようなスピリットの下、集まりを運営された落合先生をはじめとする方々に、そこから巣立った世代の一人として感謝します。

参考文献

[BGS] Werner Ballmann; Mikhael Gromov; Viktor Schroeder. Manifolds of nonpositive curvature. Progress in Mathematics, 61. 1985.

[BrHae] M.R.Bridson, A.Haefliger. Metric spaces of non-positive curvature. Springer, 1999.

[Eb] P.Eberlein. Geometry of nonpositively curved manifolds. Chicago Lectures in Mathematics. 1996. (cf. Structures of manifolds of nonpositive curvature, Surveys in Geometry, 1985).

[Ep] D.B.A.Epstein, W.Thurston et al. Word processing in group theory. Jones and Bartlett Publishers, 1992.

[FJ1] Farrell, F. T.; Jones, L. E. Negatively curved manifolds with exotic smooth structures. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 899–908.

[FJ2] Farrell, F. T.; Jones, L. E. A topological analogue of Mostow's rigidity theorem. J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 257–370.

[藤原 1] 藤原耕二. 双曲群の手引き, Surveys in Geometry - 無限群と幾何学, 1995. http://www.math.tohoku.ac.jp/~fujiwara/

[藤原 2] 藤原耕二. 有限表示群の JSJ 分解. 幾何学シンポジウム. 名古屋大. 2000. http://www.math.tohoku.ac.jp/~fujiwara/

[G;poli] M.Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps. IHES Publ.53(1981).

[G;hyp] M.Gromov, Hyperbolic groups, "Essays in group theory", MSRI Publ. Springer, 1987.

[G;asymp] Gromov, M. Asymptotic invariants of infinite groups. "Geometric group theory, Vol. 2 ", 1–295, LMS Lecture Note Ser. 182. 1993.

[G;ran] Gromov, M. Random walk in random groups. GAFA 13 (2003), 73–146.

[小島] 小島定吉. 3 次元の幾何学. 朝倉書店. 2002.

[LS] R.C.Lyndon, P.E.Schupp. Combinatorial group theory. Springer, 1977.

[大鹿] 大鹿健一, 離散群, 岩波講座現代数学の展開, 1998.

[RS] E.Rips, Z.Sela, Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition. Ann.of Math.146(1997).

[Se] J-P.Serre, Trees, 1980, Springer.

[相馬] 相馬輝彦. 3 次元多様体と双曲幾何. この予稿集の中. Surveys in Geometry 2003.

[St] J.R.Stallings, On torsion-free groups with infinitely many ends, Ann.of Math.88(1968).

[SiG86] Surveys in Geometry - Gromov と幾何学. 1986.

[SiG01] Surveys in Geometry - リーマン多様体とその極限. 2001.