量子測定理論入門

名古屋大学大学院情報科学研究科
小 澤　正 直

1　量子力学

量子力学の公理系は次のように与えられる．

公理 Q1 (量子力学系，状態，物理量). 各量子力学系には状態空間と呼ばれる可分 Hilbert 空間が対応し，系の状態は状態空間上の密度作用素で表現され，系の物理量は状態空間上の自己共役作用素で表現される．また，すべての密度作用素はある状態に対応し，すべての自己共役作用素はある物理量に対応する．

公理 Q1 から，以下，状態と状態空間上の密度作用素，物理量と状態空間上の自己共役作用素を同一視する．$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ の形の状態を純粋状態といい，状態 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ にあるとき，系は（ベクトル）状態 ψ にあるという．

公理 Q2 (Born 統計公式). 原理的に，任意の状態で一つの系 $\mathbf{S}$ の任意の物理量を一つ正確に測定することが可能であり，系が状態 ρ にあるとき物理量 A を正確に測定すると，測定値 $\mathbf{x}$ が Borel 集合 Δ に属する確率 $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}$ は Born の統計公式

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[E^A(\Delta)\rho] \tag{1}$$

で与えられる．ここで，写像 $E^A : x \mapsto E^A(\Delta)$ は A のスペクトル測度を表す．

公理 Q2 から，測定値の平均値 $\langle A \rangle$ と標準偏差 $\sigma(A)$ は，

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}[A\rho] \tag{2}$$

及び

$$\sigma(A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \tag{3}$$

で与えられる．同一の状態で二つの物理量 A, B の正確な測定をそれぞれ異なる系（統計集団）について行なう場合のそれぞれの測定値の標準偏差は，Robertson の不等式

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\langle |[A,B]| \rangle \tag{4}$$

を満たす．

公理 Q3 (時間発展の公式). 各量子力学系には，Hamiltonian と呼ばれる物理量 H が存在して，時刻 t_1 から時刻 t_2 まで系が孤立系ならば，時刻 t_2 の状態 $\rho(t_2)$ は，時刻 t_1 の状態 $\rho(t_1)$ によって，

$$\rho(t_2) = e^{-itH/\hbar}\rho(t_1)e^{itH/\hbar} \tag{5}$$

と表される．ここで，$\hbar$ は所与の単位系における Planck 定数を 2π で割った値を表す．

公理 Q4 (合成系). $\mathcal{H}$ を状態空間とする系 $\mathbf{S}_1$ と $\mathcal{K}$ を状態空間とする系 $\mathbf{S}_2$ の合成系 $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ の状態空間はテンソル積 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ で与えられ，$\mathbf{S}_1$ の物理量 A は $\mathbf{S}$ の物理量 $A \otimes I$ と同一視され，$\mathbf{S}_2$ の物理量 B は $\mathbf{S}$ の物理量 $I \otimes B$ と同一視される．

2　測定装置の統計的性質

2.1　出力分布

公理 M1 (出力分布，量子状態収縮). 系 $\mathbf{S}$ を測定し，測定値 $\mathbf{x}$ を出力する装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は，測定直前の系 $\mathbf{S}$ の状態 ρ に依存してその測定値の確率分布 $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}$ を定め，$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} > 0$ ならば，測定直前の系 $\mathbf{S}$ の状態 ρ と Borel 集合 Δ に依存して，測定値 $\mathbf{x}$ が Δ に属すると言う条件の下での測定直後の状態 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ を定める．

2.2　量子状態収縮

$\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ を入力状態 ρ に対する，$\mathbf{x} \in \Delta$ の下での**（条件付き）出力状態**と呼ぶ．$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = 0$ である Δ に対して，記号 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ は不定な密度作用素を表すとする．また，状態 ρ から 状態 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ への状態変化を**量子状態収縮**と呼ぶ．

状態 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ の操作的な意味は，以下のように与えられる．入力状態 ρ における装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定後に直ちに出力変数 $\mathbf{y}$ をもつ別の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定を引き続いて行なったとする．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値が $\mathbf{x}\in\Delta$ であるという条件の下での装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の測定値が $\mathbf{y}\in\Gamma$ であるという条件付き確率を $\Pr\{\mathbf{y}\in\Gamma|\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}$ と表す．すると，条件 $\mathbf{x}\in\Delta$ のもとで装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定の直前の状態は，$\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ である．従って，

$$\Pr\{\mathbf{y}\in\Gamma|\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}=\Pr\{\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}\} \tag{6}$$

が成り立つ．

2.3 結合出力分布の混合則

もし，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による入力状態 ρ における測定の直後に装置 $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ による測定が行なわれたとすると，式 (6) から出力変数 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の結合確率分布 $\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho\}$ が

$$\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho\}=\Pr\{\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}\}\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\} \tag{7}$$

によって与えられる．従って，２つの装置を引き続き適用して得られる測定値の結合確率分布は，第１の装置への入力状態だけで決定される．この結合確率分布を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の**結合出力分布**と呼ぶ．結合出力分布は次の性質を持つことを要請する．

公理 M2 (結合出力分布の混合則)． 任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ に対して，関数 $\rho\mapsto\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho\}$ は，任意の実数の組 x,y に対して密度作用素 ρ の凸線形関数である．

つまり，

$$\begin{aligned}&\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\Gamma\|p\rho_1+(1-p)\rho_2\}\\&\quad= p\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho_1\}+(1-p)\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\Gamma\|\rho_2\}\end{aligned} \tag{8}$$

が成り立つ．ここで，ρ_1,ρ_2 は密度作用素を表し，p は $0<p<1$ を満たす．

この公理は次のように正当化される．対象 $\mathbf{S}$ と同等の系からなり，密度作用素 ρ_1 で表される統計集団 $\mathbf{E}_1$ と密度作用素 ρ_2 で表される統計集団 $\mathbf{E}_2$ があるとし，対象 $\mathbf{S}$ が確率 p で統計集団 $\mathbf{E}_1$ から選ばれ，確率 $1-p$ で統計集団 $\mathbf{E}_2$ から選ばれたとすると，測定値 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Delta\times\Gamma$ が得られる確率は右辺で表される．一方，この時，対象 $\mathbf{S}$ の状態は密度作用素 $p\rho_1+(1-p)\rho_2$ で表されるから，測定値 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Delta\times\Gamma$ が得られる確率は左辺でも表され，それらは一致しなければならない．

２つの装置は，それらが任意の入力状態において同一の出力分布を持ち，更に，任意の測定値に対して同一の出力状態を持つとき，**統計的に同値** であると言う．

2.4 確率作用素測度

式 (7) の両辺で $\Gamma=\mathbf{R}$ とすると，出力分布の単位性 ($\Pr\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}\|\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}\}=1$) から

$$\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}=\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta,\mathbf{y}\in\mathbf{R}\|\rho\} \tag{9}$$

が得られ，右辺は ρ の凸線形関数だから，左辺も ρ の凸線形関数である．従って，次の定理を得る．

定理 2.1 (出力分布の混合則) 任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ と実数 $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して，対応 $\rho\mapsto\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}$ は，密度作用素 ρ の凸線形関数である．

出力分布を特徴付けるために，次の定義を導入する．数直線上の Borel 集合体 $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ から $\mathcal{H}$ 上の線形作用素の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ への写像 $\Pi:\mathbf{R}\mapsto\Pi(\Delta)$ は，次の条件を満たすとき，**確率作用素測度**（probability operator-valued measure, POVM）と呼ばれる：

(i) **正値性：**すべての Borel 集合 $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$ について $\Pi(\Delta)\ge 0$.

(ii) **可算加法性：**互いに交わらない Borel 集合の列 Δ_j に対して，弱作用素収束に関して $\Pi(\bigcup_j\Delta_j)=\sum_j\Pi(\Delta_j)$ が成り立つ．

(iii) **単位性：**$\Pi(\mathbf{R})=1$.

上の定理からの重要な結論は，出力分布の次の特徴付けである [1].

定理 2.2 公理 *M1* の下で，定理 *2.1* が成立することは，次の命題の成立と同等である：

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に *POVM* Π が一意に対応して，対象の任意の状態 ρ と任意の実数 $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して，

$$\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\}=\mathrm{Tr}[\Pi(\Delta)\rho] \tag{10}$$

が成り立つ．

(10) 式で定義される POVM Π を**装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM** と呼ぶ．

A を系 $\mathbf{S}$ の物理量とする．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が入力状態 ρ において物理量 A に関する **Born 統計公式 (BSF)** を満たすとは，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[E^A(\Delta)\rho] \tag{11}$$

が任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ について成り立つことを言う．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量 A を**正確に測定する**とは，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が A に関する BSF を任意の入力状態で満たすことを言う．

公理 Q2 から，$\mathbf{S}$ の任意の物理量 A に対して，それを正確に測定する装置が存在する．式 (10) 及び 式 (11) から，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が物理量を正確に測定するための必要十分条件は，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM Π が A のスペクトル測度 E^A に一致することである．

2.5　量子インストルメント

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して写像 $\mathcal{I}(\Delta) : \rho \mapsto \mathcal{I}(\Delta)\rho$ を

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} \tag{12}$$

によって定義する．ここで，ρ は密度作用素を，Δ は Borel 集合を表す．写像 $\mathcal{I}(\Delta)$ は，任意の密度作用素 ρ をトレースが $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}$ である正値作用素に変換する．結合出力分布の混合則から $\mathcal{I}(\Delta)$ は密度作用素のなす凸集合から $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の空間 $\tau c(\mathcal{H})$ への凸線形変換であり，$\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の空間 $\tau c(\mathcal{H})$ の線形変換に一意的に拡張される [2, 3]．Davies と Lewis は，測定装置の統計的性質の系統的記述のために次の数学的概念を導入した [4, 5]．$\mathcal{B}(\mathbf{R})$ から $\tau c(\mathcal{H})$ 上の線形変換の空間 $\mathcal{L}(\tau c(\mathcal{H}))$ への写像 $\mathcal{I} : \Delta \mapsto \mathcal{I}(\Delta)$ は，次の条件が満たされるならば **インストルメント** と呼ばれる．

(i) **正値性：**$\mathcal{I}(\Delta) \in \mathcal{L}(\tau c(\mathcal{H}))$ は，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ に対して，$\mathcal{H}$ 上の正作用素 $\rho \in \tau c(\mathcal{H})$ を正作用素 $\mathcal{I}(\Delta)\rho \in \tau c(\mathcal{H})$ に変換する．

(ii) **可算加法性** 互いに交わらない Borel 集合の列 Δ_j に対して，強作用素収束に関して $\mathcal{I}(\bigcup_j \Delta_j) = \sum_j \mathcal{I}(\Delta_j)$ が成り立つ．

(iii) **単位性：**$\mathcal{I}(\mathbf{R})$ はトレースを保存する．

この時，次の定理が成り立つ [3, 6]．

定理 2.3 公理 *M1* の下で，公理 *M2* は，次の命題の成立と同等である：

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，一意的にインストルメント $\mathcal{I}$ が存在して，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ と任意の密度作用素 ρ に対して 式 (12) を満たす．

上で与えられた写像 $\mathcal{I}(\Delta)$ は，**$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の測定値 $\mathbf{x} \in \Delta$ に対するオペレーション**と呼ばれる．また，写像 $\mathcal{I}$ は，**装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメント**と呼ばれる．この時，出力分布と出力状態は，

$$\begin{aligned} \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} &= \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho], \qquad (13) \\ \rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} &= \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho]} \qquad (14) \end{aligned}$$

と表される．ここで，第 2 の関係は，$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} > 0$ を仮定している．従って，もし，$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$ 及び $\mathcal{I}_{\mathbf{y}}$ がそれぞれ $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ のインストルメントならば，結合出力分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Gamma \| \rho\} = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{\mathbf{y}}(\Gamma)\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(\Delta)\rho] \tag{15}$$

と表すことができる．ここで，ρ は状態，x, y は実数を表す．装置の出力分布と出力状態はともにそのインストルメントによって決定される．従って，2 つの装置が統計的に同値であるための必要十分条件は，それらが同一のインストルメントを持つことである．

$\mathcal{H}$ 上の作用素の空間 $\tau c(\mathcal{H})$ 上の任意の線形変換 T の**双対**とは，$\mathcal{H}$ 上の線形変換の空間 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 上の線形変換 T^* で任意の $A, \rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ に対して

$$\mathrm{Tr}[A(T\rho)] = \mathrm{Tr}[(T^*A)\rho] \tag{16}$$

を満たすものである．オペレーション $\mathcal{I}(\Delta)$ の双対 $\mathcal{I}(\Delta)^*$ は，**測定値 $\mathbf{x} \in \Delta$ に対する双対オペレーション** と呼ばれる．

双対オペレーション $\mathcal{I}(\Delta)^*$ を恒等作用素 I に適用することによって得られる作用素 $\mathcal{I}(\Delta)^*I$ は，**オペレーション $\mathcal{I}(\Delta)$ のエフェクト**と呼ばれる．式 (31) 及び 式 (16) より

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[(\mathcal{I}(\Delta)^*I)\rho] \tag{17}$$

を得る．ここで，ρ は任意だから，式 (10) と比較すると, 任意の実数 x に対して

$$\Pi(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta)^*I \tag{18}$$

が得られる．従って，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の POVM は，インストルメント $\mathcal{I}$ のエフェクトによって決定される．

$\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$ 及び $\mathcal{I}_{\mathbf{y}}$ をそれぞれ装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 及び $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ のインストルメントとし，$\Pi_{\mathbf{y}}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ の POVM とする．すると，

$$\mathrm{Tr}[\mathcal{I}_{\mathbf{y}}(\Gamma)\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(\Delta)\rho] \;=\; \mathrm{Tr}\{[\mathcal{I}_{\mathbf{y}}(\Gamma)^*I][\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(\Delta)\rho]\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{Tr}\{[\Pi_{\mathbf{y}}(\Gamma)[\mathcal{I}_{\mathbf{x}}(\Delta)\rho]\} \\
&= \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(\Delta)^*[\Pi_{\mathbf{y}}(\Gamma)]\rho\} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

が得られる．従って，結合出力分布は，任意の実数 $x, y \in \mathbf{R}$ に対して

$$
\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Gamma \| \rho\} = \mathrm{Tr}\{\mathcal{I}(\Delta)^*[\Pi_{\mathbf{y}}(\Gamma)]\rho\} \qquad (20)
$$

と表される．

装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメントを $\mathcal{I}$ とすると，任意の状態 ρ に対して，

$$
\mathcal{I}(\Delta)\rho = \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} \qquad (21)
$$

を満たす．$\mathcal{I}(\Delta)$ は，装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**測定結果** $\mathbf{x} \in \Delta$ **に対するオペレーション**と呼ばれる．状態 ρ から状態 $\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}}$ への状態変化を**選択的量子状態収縮**と呼ぶ．一方，状態変化 $\rho \mapsto \rho_{\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}\}}$ は，**非選択的量子状態収縮**と呼ばれる．装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ のインストルメント $\mathcal{I}$ に対して，オペレーション $T = \mathcal{I}(\mathbf{R})$ を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**非選択的オペレーション**と呼び，$T^* = \mathcal{I}(\mathbf{R})^*$ を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の**非選択的双対オペレーション**と呼ぶ．非選択的オペレーションは，トレースを保存する正写像であり，非選択的双対オペレーションは，単位元（恒等作用素）を保存する正写像である．すなわち，

$$
\mathrm{Tr}[T\rho] = \mathrm{Tr}\rho \qquad (22)
$$

が任意の作用素 ρ について成り立ち，また，

$$
T^* I = I \qquad (23)
$$

が成り立つ．

2.6　完全正値性

$\tau c(\mathcal{H})$ 上の任意の線形変換 T は，任意の $\rho_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 及び $\rho'_j \in \tau c(\mathbf{C}^n)$ に対する関係

$$
(T \otimes id_n)(\sum_j \rho_j \otimes \rho'_j) = \sum_j T(\rho_j) \otimes \rho'_j \qquad (24)
$$

によって，自然に $\tau c(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n) = \tau c(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ 上の線形変換 $T \otimes id_n$ に拡張される．ここで，$\mathbf{C}^n$ は n-次元ヒルベルト空間を表す．もし，任意の自然数 n に対して，$T \otimes id_n$ が $\tau c(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n)$ に属する正作用素を $\tau c(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n)$ に属する正作用素

に変換するならば，T は**完全正値 (completely positive, CP)** と呼ばれる．インストルメント $\mathcal{I}$ は，すべての $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ について $\mathcal{I}(\Delta)$ が CP ならば**完全正値 (completely positive, CP)** と呼ばれる．任意の CP インストルメント $\mathcal{I}$ に対して，$\Pi(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta)^* I$ とおくと POVM Π が得られる．これを **CP インストルメント $\mathcal{I}$ の POVM** と呼ぶ．逆に，任意の POVM Π に対して，ある CP インストルメント $\mathcal{I}$ が存在して，Π は CP インストルメント $\mathcal{I}$ の POVM となる．

2.7　自明的拡張可能性

任意の装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，次の要請をおくことは自然なことである．

公理 M3 (自明的拡張可能性). 系 $\mathbf{S}$ に対する任意の測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，無限次元の状態空間 $\mathcal{H}'$ をもつ系 $\mathbf{S}'$ 及び合成系 $\mathbf{S} + \mathbf{S}'$ に対する測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ が存在して，任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$，$\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$，$\rho' \in \mathcal{S}(\mathcal{H}')$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\mathbf{x}' \in \Delta \| \rho \otimes \rho'\} &= \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}, \qquad (25) \\
(\rho \otimes \rho')_{\{\mathbf{x}'\in\Delta\}} &= \rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} \otimes \rho'. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

を満たす．

上の要請は，以下のように正当化される．対象 $\mathbf{S}$ を測定する任意の装置を $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ とする．$\mathbf{S}'$ を無限次元状態空間 $\mathcal{H}'$ を持ち，系 $\mathbf{S}$ 及び装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ から遠く離れた任意の系とする．当然，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は系 $\mathbf{S}'$ に対する測定は行なわないが，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が記述する物理的な装置は，形式的に系 $\mathbf{S} + \mathbf{S}'$ を測定する装置であると記述することができる．この時，系 $\mathbf{S}$ の測定結果は，系 $\mathbf{S}'$ の状態に依存しない．従って，　装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ は (25)，(26) で示される統計的性質を持つと結論される．

$\mathcal{I}'$ を装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ のインストルメントとする．すると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}'(\Delta)(\rho \otimes \rho') &= \Pr\{\mathbf{x}' = x \| \rho \otimes \rho'\}(\rho \otimes \rho')_{\{\mathbf{x}'=x\}} \\
&= \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} \otimes \rho' \\
&= [\mathcal{I}(\Delta)\rho] \otimes \rho' \qquad (27)
\end{aligned}
$$

が得られる．従って，拡大された装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ の測定値 $\mathbf{x}' = x$ に対するオペレーション $\mathcal{I}'(\Delta)$ は，$\mathcal{I}'(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta) \otimes id_n$ で与えられる．この時，オペレーション $\mathcal{I}'(\Delta)$ の正値性から元のオペレーション $\mathcal{I}(\Delta)$ の完全正値性が導かれる．従って，次の定理が導かれる．

定理 2.4 公理 *M1-M2* の下で，公理 *M3* は次の要請と同値である：

任意の装置のインストルメントは完全正値である．

ここまで，すべての装置が満たすべき必要条件として，結合出力分布の混合則と自明的拡張可能性という２つの要請を課した．これらの条件の下で，すべての装置に対して一意的に，出力分布とその装置によって引き起こされる量子状態収縮を決定する CP インストルメントが対応することを示した．従って，ある装置によって可能な出力分布と量子状態収縮を決定する問題は，どの CP インストルメントがある装置に対応しているのという問題に帰着される．この問題は，次節で議論され，すべての CP インストルメントに対して少なくとも一つの装置が対応していることが示される．また，すべての POVM に対して少なくとも一つの CP インストルメントが存在するので，すべての POVM に対して少なくとも一つの装置が対応することも導かれる．

3 測定過程論

3.1 測定過程

測定の過程は，対象と測定装置の間の相互作用を必ず含み，その相互作用の後で装置に含まれるメータを測定することにより，測定値が得られると考えられる．von Neumann は射影測定の統計的性質がこのような記述によっても得られることを示して，射影仮説が他の公理と整合的であることを示した [7]．インストルメントの実現可能性を議論するために，文献 [8] において，この von Neumann の議論を一般化して，測定過程の最も一般的な数学モデルを導入した．Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上の密度作用素 σ，テンソル積 Hilbert 空間 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U, Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素 M からなる４つ組 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ を一般に Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に対する**測定過程**と呼ぶ．σ が純粋状態のとき，測定過程は**純粋**であると言い，また，$\mathcal{K}$ が可分なとき，測定過程は**可分**であると言う．

測定過程 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ は，次のような測定のプロセスを数学的にモデル化したものである．この測定は，対象系と測定装置との相互作用によって行われ，測定値は相互作用後の測定装置のメータ観測可能量 M を測定することによって得られる．ただし，測定装置は，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ で記述され，測定の直前の状態を σ とし，この相互作用の間の合成系の時間発展は，ユニタリ作用素 U で表されるとする．このモデルは，今日では，測定過程の標準モデルとして，広く受け入れられている．

さて，測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ による測定が，測定過程 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ によって記述されるとすると，測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質は，次のように定められることがわかる．

$$\Pr\{\mathbf{x}\in\Delta\|\rho\} = \mathrm{Tr}\left[\left(1\otimes E^M(\Delta)\right)U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\right], \tag{28}$$

$$\rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} = \frac{\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\left[\left(1\otimes E^M(\Delta)\right)U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\right]}{\mathrm{Tr}\left[\left(1\otimes E^M(\Delta)\right)U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\right]}. \tag{29}$$

ここで，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}$ は，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ に関する部分トレースを表す．したがって，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は実際に次式で定まるインストルメント $\mathcal{I}$ を持つ．

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}\left[\left(1\otimes E^M(\Delta)\right)U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger\right]. \tag{30}$$

このとき，$\mathcal{I}$ を測定過程 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ のインストルメントと呼ぶ．このようにして得られたインストルメントは，実際に完全正値性を持っている．

3.2 ユニタリ実現可能性公理

前節で，任意の装置が満たすべき必要条件として，出力結合分布の混合則とインストルメントの完全正値性を取り上げ，任意の装置にその統計的性質を記述する CP インストルメントが一意に対応することを示した．ここでは逆に，CP インストルメントがある装置のインストルメントになるための十分条件を考察しよう．そのような条件は，次のように定式化される．

公理 M4 (ユニタリ実現可能性). 任意の測定過程 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ に対して，(28), (??) を満たす装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ が存在する．

上の仮説は次のように正当化される．公理 Q1 から，任意の自己共役作用素がある物理量に対応し，任意の密度作用素が状態に対応する．更に，Stone の定理 [9] により，原理的に任意のユニタリ作用素がある物理量で生成される時間発展として実現できる．従って，任意の測定過程は，原理的に（与えられた単位系と，物理系を数学的に記述する上で与えられたある実験精度の限界のもとで）実現可能である．

3.3 表現定理

さて，インストルメント $\mathcal{I}$ が測定過程 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ によって記述されるならば，公理 M4 からインストルメント $\mathcal{I}$ は実現可能な測定を記述していると考えられる．

すると，問題は，どのようなインストルメントがこのようなモデルを持つかということになる．この問題は次の定理で解決される [10, 8]．

定理 3.1 (完全正値インストルメントの表現定理) *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ に対する任意の完全正値インストルメント $\mathcal{I}$ に対して，$\mathcal{H}$ に対するある純粋な測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ が存在して， $\mathcal{I}$ は $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ のインストルメントである．また，$\mathcal{H}$ が可分の時，$\mathcal{K}$ も可分とすることができる．

この定理から，任意の完全正値インストルメントは，物理的に実現可能な測定に対応すると考えられる．従って，これまでに挙げた 4 個の公理（公理 M1〜公理 M4）の下で，装置の統計的同値類の全体と CP インストルメントの全体は一対一に対応することが結論される．

このようにして，量子力学の公理 Q1〜Q4 に次の一般測定公理を付け加えることができることが明らかになった．

公理 Q5 (一般測定公理). 状態空間 $\mathcal{H}$ をもつ量子系に対する任意の測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ に対して，完全正値インストルメント $\mathcal{I}$ が一意に存在して，$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ の統計的性質は，

$$\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho], \tag{31}$$

$$\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho]} \tag{32}$$

によって定まる．また，任意のインストルメント $\mathcal{I}$ に対して，上記の統計的性質を持つ測定装置が存在する．

量子情報は，測定の概念が基本的役割を果たしている分野である．この分野の代表的教科書では，この一般測定公理，または，可能な測定値が有限個の場合にそれを簡略化させたものを公理として採用している．

参考文献

[1] M. Ozawa. Optimal measurements for general quantum systems. *Rep. on Math. Phys.*, 18:11–28, 1980.

[2] M. Ozawa. An operational approach to quantum state reduction. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 259:121–137, 1997.

[3] M. Ozawa. Measurements of nondegenerate discrete observables. *Phys. Rev. A*, 62:062101 (1–13), 2000.

[4] E. B. Davies and J. T. Lewis. An operational approach to quantum probability. *Commun. Math. Phys.*, 17:239–260, 1970.

[5] E. B. Davies. *Quantum Theory of Open Systems*. Academic, London, 1976.

[6] M. Ozawa. Quantum measurement, information, and completely positive maps. In P. Tombesi and O. Hirota, editors, *Quantum Communication, Computing, and Measurement 3*, pages 97–106, New York, 2001. Kluwer/Plenum. eprint arXiv:quant-ph/0107090.

[7] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Springer, Berlin, 1932.

[8] M. Ozawa. Quantum measuring processes of continuous observables. *J. Math. Phys.*, 25:79–87, 1984.

[9] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*. Academic, New York, 1972.

[10] M. Ozawa. Conditional expectation and repeated measurements of continuous quantum observables. In K. Itô and J. V. Prohorov, editors, *Probability Theory and Mathematical Statistics,* Lecture Notes in Math. **1021**, pages 518–525, Berlin, 1983. Springer.