結び目と素数 — 数論的位相幾何学入門

九州大学大学院数理学研究院
森下昌紀
仙台シンポジウム (筆記 伊東杏希子)

2011年8月25日(木)

■ 結び目理論と整数論との間の類似性について考える.

[3次元トポロジー]		[数論]
	⟵ 数論的トポロジー ⟶	
[結び目]		[素数]

1 Gauss の相互律とまつわり数

■ まず、平方剰余の相互法則 (Gauss の相互律) について述べる. Gauss は著書 "Disquisitiones Arithmeticae (1801)" において平方剰余の相互法則を示した.

定義 1. p を奇素数とし, a を $\gcd(a,p)=1$ であるような整数とする. Legendre 記号 (a/p) を次のように定義する ;

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & x^2 \equiv a \bmod p \text{ となる } x \in \mathbb{Z} \text{ が存在する場合,} \\ -1 & x^2 \equiv a \bmod p \text{ となる } x \in \mathbb{Z} \text{ が存在しない場合.} \end{cases}$$

例 1. (1) $8^2 = 64 \equiv 13 \bmod 17$ より $(13/17) = 1$ である.
(2) $x^2 \equiv 5 \bmod 17$ を満たす整数 x は存在しない ($x = 0, ..., 16$ を代入することで解がないことが確かめられる). よって, $(5/17) = -1$ である.

定理 1. (Gauss の相互律) p, q を相異なる奇素数とする. この時,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

となる.

特に, $p \equiv 1 \bmod 4$ または $q \equiv 1 \bmod 4$ ならば $(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} = 1$ となるので, この場合には $(q/p) = (p/q)$ となる.

例 **2.**

$$\left(\frac{5}{17}\right) = \left(\frac{17}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1$$

である.

例 2 について, $x^2 \equiv 5 \bmod 17$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在するかを考えるよりも, $x^2 \equiv 17 \equiv 2 \bmod 5$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在するかを考える方が容易である. Gauss の相互律を用いることにより, このように問題を容易にすることができる.

■ 次に, まつわり数について述べる. まつわり数は結び目理論における最初の不変量であり, Gauss の著書 "Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen (1833)" において論じられている.

K, L を 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の交わらない二つの有向単純閉曲線 (2 成分絡み目) とし, K を境界とする曲面を Σ_K とする. L と Σ_K との各交点 P での交わり方は, P での L の接ベクトルが, P での Σ_K の法線ベクトルと同じ向きか逆向きかのどちらかである. 同じ向きの場合には $\varepsilon(P) := 1$, 逆向きの場合には $\varepsilon(P) := -1$ と定義する.

定義 **2. (まつわり数)**

$$\mathrm{lk}(K, L) := \sum_{P \in \Sigma_K \cap L} \varepsilon(P)$$

は結び目不変量である. $\mathrm{lk}(K, L)$ をまつわり数という.

注意 **1.** まつわり数 $\mathrm{lk}(K, L)$ は L が K と絡む回数である.

まつわり数には, ゲージ理論的な積分表示が与えられている (定理 2).

定理 **2. (Gauss-Schwarz の積分公式)**

$$\mathrm{lk}(K, L) = \int_{\mathcal{A}} \left(e^{iS(A)} \int_K A \int_L A \right) \mathcal{D}\mathcal{A}.$$

ただし, $\mathcal{A} := \{A : \mathbb{R}^3\text{上の微分 1-形式}\}$, $S(A) := \int_{\mathbb{R}^3} A \wedge dA$ を表す.

定義２から, まつわり数 $\mathrm{lk}(K,L)$ には対称性 $\mathrm{lk}(K,L)=\mathrm{lk}(L,K)$ があることが分かるが, この対称性は定理２からも言える (積分 $\int_K A$ と $\int_L A$ は交換可能なので).

2 結び目と素数 — 辞書

この節では, トポロジーと数論との間の類似性 (位相空間に対するホモロジー理論・ホモトピー理論と, スキームに対するエタールホモロジー理論・エタールホモトピー理論との間の類似性) について述べる.

2.1 円周と有限体

■ 円周 S^1 と有限体 $\mathbb{F}_q$ (q は素数) の基本群の間に類似性が見られる.

S^1 上のある基点を出発し, S^1 を一回りしてその基点に戻るループを l とすると, S^1 の基本群 $\pi_1(S^1)$ は無限巡回群 $\langle [l] \rangle$ となる. $\overline{\mathbb{F}}_q$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ の分離閉包とすると, スキーム $\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q$ (エタールコホモロジー次元は 1) の基本群は $\pi_1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ となる. Frobenius 自己同型 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ を $\sigma(x) := x^q$ $(x \in \overline{\mathbb{F}}_q)$ で定義すると, さらに,

$$\pi_1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \langle \sigma \rangle \simeq \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} =: \hat{\mathbb{Z}}$$

が言える. ここで, l と σ が対応していると考えると, S^1 と $\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q$ の基本群の間に類似性が見られる.

円周 S^1	有限体 $\mathbb{F}_q$
$\pi_1(S^1) = \langle [l] \rangle = \mathrm{Gal}(\mathbb{R}/S^1) \simeq \mathbb{Z}$	$\pi_1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q) = \langle \sigma \rangle = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$

2.2 管状近傍と $\mathfrak{p}$ 進整数環

■ 管状近傍 V と $\mathfrak{p}$ 進整数環 $\mathrm{Spec}\ O_{\mathfrak{p}}$ の間に類似性が見られる.

円周 S^1 の管状近傍 V は S^1 にホモトピー同値である. 一方で, $\mathbb{F}_q$ を剰余体とする $\mathfrak{p}$ 進整数環 $O_{\mathfrak{p}}$ について, $\mathrm{Spec}\ O_{\mathfrak{p}}$ (エタールコホモロジー次元は 2) は $\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q$ とエタールホモトピー同値である. よって, 管状近傍 V と $\mathrm{Spec}\ O_{\mathfrak{p}}$ とを類似物と見ることができる. また, 境界トーラス ∂V は $V \setminus S^1$ とホモトピー同値である. 一方で, $\mathfrak{p}$ 進体を $k_{\mathfrak{p}}$ とすると $\mathrm{Spec}\ k_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}\ O_{\mathfrak{p}} \setminus \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q$ である. よって, 境界トーラス ∂V と $\mathrm{Spec}\ k_{\mathfrak{p}}$ も類似物と見ることができる. さらに, 基本群 $\pi_1(\partial V)$

と $\pi_1(\mathrm{Spec}\ k_{\mathfrak{p}})$ との間にも類似性が見られる (下記の表参照).

管状近傍 V	$\mathfrak{p}$ 進整数環 **Spec** $O_{\mathfrak{p}}$
境界トーラス $\partial V = V \setminus S^1$	$\mathfrak{p}$ 進体 $\mathrm{Spec}\ k_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Spec}\ O_{\mathfrak{p}} \setminus \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_q$
$1 \to \langle\alpha\rangle \to \pi_1(\partial V) \to \langle\beta\rangle \to 1$	$1 \to I_{k_{\mathfrak{p}}} \to \pi_1(\mathrm{Spec}\ k_{\mathfrak{p}}) \to \langle\sigma\rangle \to 1$
α : メリディアン β : ロンジチュード	$I_{k_{\mathfrak{p}}}$: $k_{\mathfrak{p}}$ の惰性群 ($I_{k_{\mathfrak{p}}}^{\mathrm{tame}} = \langle\tau\rangle,\ \tau \in I_{k_{\mathfrak{p}}}$) σ : Frobenius 自己同型
$\alpha\beta = \beta\alpha$	$\sigma\tau = \tau^q\sigma$

2.3　三次元多様体と代数体の整数環

■ 三次元多様体 M と代数体 k の整数環 Spec O_k の間に類似性が見られる.

三次元多様体 M	代数体 k の整数環 **Spec** O_k (エタールコホモロジー次元は 3)
エンド	無限素点
$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$	$\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$
3 次元 Poincaré 双対性	3 次元 Artin-Verdier 双対性

2.4　結び目と素イデアル

■ 結び目 K と整数環 O_k の素イデアル $\mathfrak{p}$ の間に類似性が見られる.

結び目は, S^1 の三次元多様体 M への埋め込みのことである. 2.1, 2.3 節より,

円周 S^1 と有限体 Spec $\mathbb{F}_q$, 三次元多様体 M と k の整数環 Spec O_k を類似物と見ることができるので, 結び目 $K : S^1 \hookrightarrow M$ と自然な射 Spec $\mathbb{F}_\mathfrak{p} \hookrightarrow$ Spec O_k も類似物と見なすことができる.

結び目 K	O_k の素イデアル $\mathfrak{p}$
$K : S^1 \hookrightarrow M$ 特に, $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$	Spec $\mathbb{F}_\mathfrak{p} \hookrightarrow$ Spec O_k $(\mathbb{F}_\mathfrak{p} = O_k/\mathfrak{p})$ 特に, Spec $\mathbb{F}_\mathfrak{p} \hookrightarrow$ Spec $\mathbb{Z}$
絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$	素イデアルの有限集合 $S = \{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$
結び目 (絡み目) 補空間 $X_L = M \setminus L$	$X_S =$ Spec $O_k \setminus S$
結び目 (絡み目) 群 $G_L := \pi_1(X_L)$	分岐条件付き Galois 群 $G_S := \pi_1(X_S) = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ $(*)$ k_S : S の外で不分岐な k の最大 Galois 拡大

2.5 類似に基づく研究

- 辞書作り.

- 一方にあり, 他方にない概念・定理・理論などを定式化し示す.

3 まつわり数と平方剰余再論

- まつわり数と平方剰余記号を, 結び目と素数の類似の観点から見直す.

3.1 まつわり数

$K \cup L \subset \mathbb{R}^3$ を 2 成分絡み目とする. 結び目 K の補空間 $X_K = \mathbb{R}^3 \setminus K$ に対して二重被覆 $Y_K \to X_K$ が存在し, $\mathrm{Gal}(Y_K/X_K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる. $\rho : \pi_1(X_K) \to$

$\mathrm{Gal}(Y_K/X_K)$ を自然な準同型とすると, 合成 $\pi_1(X_K) \to \mathrm{Gal}(Y_K/X_K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において, $L \in \pi_1(X_K)$ の像は $\mathrm{lk}(K,L) \bmod 2$ となる.

3.2 平方剰余記号

p, q を相異なる二つの奇素数とする (ただし, $p \equiv 1 \bmod 4$ と仮定する). $X_p = \mathrm{Spec}\, O_k \setminus \{p\}$ に対して二重エタール被覆 $Y_p \to X_p$ が存在し, $\mathrm{Gal}(Y_p/X_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる. $\rho : \pi_1(X_p) \to \mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \{\pm 1\}$ を自然な準同型とし, $\mathrm{lk}_2(p,q) \in \mathrm{Gal}(Y_p/X_p)$ を $\pi_1(X_p) \to \mathrm{Gal}(Y_p/X_p) = \{\pm 1\}$ における q 上の Frobenius 自己同型 $\sigma_q \in \pi_1(X_p)$ の像として定義すると,

$$\mathrm{lk}_2(p,q) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \sigma_q(\sqrt{p}) = \sqrt{p} \\ -1 & \text{if} \quad \sigma_q(\sqrt{p}) = -\sqrt{p} \end{cases}$$

となる. つまり,

$$\mathrm{lk}_2(p,q) = \left(\frac{p}{q}\right)$$

である.

3.3 まつわり数と平方剰余記号

3.1, 3.2 節より, まつわり数 $\mathrm{lk}(K,L)$ と平方剰余記号 $\mathrm{lk}_2(p,q) = (p/q)$ とを類似物と見なすことができる. 1 節で, $\mathrm{lk}(K,L) = \mathrm{lk}(L,K)$, $(p/q) = (q/p)$ となることを述べたが, まつわり数と平方剰余記号を類似物と見なすことで, まつわり数の対称性は Gauss 相互律と対応していると考えることができる. 定理 2 で述べたように, まつわり数にはゲージ理論的な積分表示が与えられている. そこで,「平方剰余記号にも積分表示に対応する表示があるのか？」という問いが自然に派生するが, Gauss 和

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \Big(\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta_p^{x^2}\Big)^{q-1}$$

がそれに該当する.

4 高次まつわり数と多重べき剰余記号

- まつわり数に対して, 高次まつわり数が Milnor により導入された. これに対し, 高次まつわり数の類似物 (多重べき剰余記号) を考える.

4.1 高次まつわり数

$L = K_1 \cup \cdots \cup K_n \subset S^3$ を n 成分絡み目とする. 絡み目群 $G_L = \pi_1(S^3 \backslash L)$ に対し, $G_L^{(1)} := G_L$, $G_L^{(n)} := [G_L : G_L^{(n-1)}]$ とする. この時,

$$G_L/G_L^{(n)} = \langle x_1, ..., x_n \mid [x_1, y_1] = \cdots = [x_n, y_n] = 1, F^{(n)} = 1 \rangle$$

となる. ただし, x_i は K_i のメリディアン, y_i は K_i のロンジチュード, $F := \langle x_1, ..., x_n \rangle$ (自由群) を表す. 自由群 $F = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ から非可換べき級数環 $\mathbb{Z}\langle\langle X_1, ..., X_n \rangle\rangle$ への埋め込みを次で定義する (Magnus 展開)： $x_i \mapsto 1 + X_i$, $x_i^{-1} \mapsto 1 - X_i + X_i^2 - \cdots$. この時, y_j の像は整数 $\mu(i_1 \cdots i_r j)$ を用いて $1 + \sum \mu(i_1 \cdots i_r j) X_{i1} \cdots X_{i_r}$ と書ける. $\mu(i_1 \cdots i_r j) \in \mathbb{Z}$ を高次まつわり数という. 実際には, $\mu(ij) = \mathrm{lk}(K_i, K_j)$ が成り立つ.

例 **3.** $L = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ を Borromean 環とすると, $i \neq j$ の時 $\mu(ij) = 0$, $\mu(123) = 1$ となる.

定理 **3. (Milnor)** $|I| < |J|$ なる任意のインデックス I に対し $\mu(I) = 0$ ならば, $\mu(J)$ は絡み目不変量となる (Milnor 不変量).

4.2 多重べき剰余記号

$p_1, ..., p_n$ を相異なる n 個の奇素数とし, $S := \{p_1, ..., p_n\} \subset \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$ とする. $\pi_1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \setminus S)$ の最大 pro-2 商 $G_S = \pi_1(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \setminus S)^{\text{pro-2}}$ は

$$G_S = \langle x_1, ..., x_n \mid y_i x_j = y_j^q x_i] \rangle$$

と書ける. ただし, x_i は p_i 上のモノドロミー, y_i は p_i 上の Frobenius 自己同型を表す. 副 2 自由群 $\langle x_1, ..., x_n \rangle$ から非可換べき級数環 $\mathbb{Z}_2\langle\langle X_1, ..., X_n \rangle\rangle$ への埋め込みを次で定義する： $x_i \mapsto 1 + X_i$, $x_i^{-1} \mapsto 1 - X_i + X_i^2 - \cdots$. この時, y_j の像は $\hat{\mu}(i_1 \cdots i_r j) \in \mathbb{Z}_2$ を用いて $1 + \sum \hat{\mu}(i_1 \cdots i_r j) X_{i1} \cdots X_{i_r}$ と書ける. $I := (i_1 \cdots i_r)$ に対して,

$$\mu_2(I) := \hat{\mu}(I) \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

と定義する. $\mu_2(I)$ を数論的高次まつわり数, $[p_{i_1}, \ldots, p_{i_r}] = (-1)^{\mu_2(i_1 \cdots i_r)}$ を多重べき剰余記号という. 定理 3 の類似として次が成り立つ.

定理 **4.** $|I| < |J|$ なる任意のインデックス I に対し $\mu_2(I) = 0$ ならば, $\mu_2(J)$ は S のみによる不変量である.

$\mu_2(I)$ の数論的な意味として,「$p_1, ..., p_{r-1}$ のみが分岐するある Galois 拡大 $k_r/\mathbb{Q}$ s.t.

$$\mathrm{Gal}(k_r/\mathbb{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 & \cdots & \mathbb{F}_2 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \mathbb{F}_2 \\ \text{\huge 0} & & & 1 \end{pmatrix}$$

における p_r の分解法則を記述している」ということを挙げることができる.

例 4. $r = 2$ の時, $k_2 := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1})$ とおくと

$$\mathrm{Gal}(k_2/\mathbb{Q}) = \mathbb{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. k_2 における p_2 の分解法則は平方剰余記号 (p_1/p_2) で記述できる. ここで,

$$(-1)^{\mu_2(12)} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

より, 実際に $\mu_2(12)$ は k_2 における p_2 の分解法則を記述していることが分かる.

例 5. $r = 3$ の時, $k_3 :=$ Rédei の 8 次 2 面体拡大 (1939) とおくと

$$\mathrm{Gal}(k_3/\mathbb{Q}) = D_8 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 1 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. Rédei は k_3 における p_3 の分解法則を記述するものとして, トリプル記号 $[p_1, p_2, p_3]$ を導入した (Rédei のトリプル記号). $[p_1, p_2, p_3]$ について

$$(-1)^{\mu_2(123)} = [p_1, p_2, p_3]$$

が成り立つ. 従って, $\mu_2(123)$ は実際に k_3 における p_3 の分解法則を記述していることが分かる.

例 4 , 5 より, 平方剰余記号や Rédei のトリプル記号を一般化したものが多重べき剰余記号であると見ることができるので, 多重べき剰余記号を高次まつわり数の類似物と見なすことができる. $r = 4$ の場合についても次の結果が知られている.

定理 5. (天野郁弥, 2010) k_4 (64 次拡大) の具体的構成と 4 重記号 $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ の導入 *s.t.* $(-1)^{\mu_2(1234)} = [p_1, p_2, p_3, p_4]$.

5　整数論, 幾何学, 物理学における類似性

Gauss の結び目理論は古典電磁気学の中から生まれたが, 結び目理論と数論の関係も現代の場の理論と繋がって行くように思われる. この節では, 整数論, 幾何学, 物理学における類似性について考える.

5.1　対応関係

整数論	幾何学	物理学
平方剰余 $\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)$	まつわり数 $\mathrm{lk}(K,L)=\mathrm{lk}(L,K)$	作用・反作用 $(b,e)=(e,b)$
Artin-Verdier 双対性 (類体論)	Poincaré 双対性	Maxwell 電磁双対性
岩澤理論	Alexander-Fox 理論	量子電磁力学 可換ゲージ理論
肥田理論・非可換類体論 Langlands 双対性	双曲幾何 Chern-Simons ゲージ理論 S-双対性	超対称非可換ゲージ理論 S-双対性・電磁双対性

5.2　類体論と電磁双対性

5.1 節での表について補足する.

5.2.1　平方剰余の相互法則と作用・反作用の法則の類似性

平方剰余記号は

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\sigma_q(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$$

のように,「Frobenius ループ σ_q に沿ったモノドロミー」と見ることもできる. この見方により, 平方剰余の相互法則と作用・反作用の法則を類似物と見ることが

できる. b をモノポールとし, b のまわりを電荷 e がループ C に沿って一回りするとする. このとき, 電荷 e がループ C に沿って一回りした時のモノドロミーは

$$(b,e)=\exp\left(\frac{ie}{\hbar}\oint_C A\right)$$

となる. ただし, A はモノポール b が生むゲージ場 (= 接続) を表す. (b,e) は電荷 e がモノポール b から受ける変化である. これに対し, モノポール b が電荷 e から受ける変化 (e,b) は

$$(e,b)=(b,e)$$

を満たす (作用・反作用の法則). $p\equiv 1 \bmod 4$ または $q\equiv 1 \bmod 4$ ならば

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$$

が成り立つので, $\left(\frac{p}{q}\right)$ と (b,e) とを類似物と見ることができる. さらに, 1 節の例 2 で述べたように, Gauss の相互律を用いることで $x^2\equiv a \bmod p$ となる $x\in\mathbb{Z}$ が存在するかどうかをより簡単に考えることができる. これに類似する状況も見ることができる. Stokes の定理により

$$eb=2\pi i\hbar n \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

となる (Dirac の量子化条件). これにより

$$e\gg 1 \ \Leftrightarrow\ b\ll 1$$

が成り立つので, 同様の双対性があると見ることができる.

作用・反作用の法則	平方剰余の相互法則
$e\gg 1 \ \Leftrightarrow\ b\ll 1$	p : 大 $\Leftrightarrow$ q : 小
強結合 (難) $\xleftarrow{\text{双対}}\!\!\rightarrow$ 弱結合 (易)	$x^2\equiv q \bmod p$ (難) $\xleftarrow{\text{双対}}\!\!\rightarrow$ $x^2\equiv p \bmod q$ (易)

5.2.2 Artin-Verdier 双対性, Poincaré 双対性, Maxwell 電磁双対性の類似性

■ Poincaré 双対性

$$H^1(X_K)\simeq H_c^2(X_K)^* \quad ; \quad [\Sigma_K]\cup[L]=\mathrm{lk}(K,L)$$

■ Artin-Verdier 双対性

$$H^1(X_p) \quad \simeq \quad H^2_c(X_p)^* \;\; ; \;\; [\Sigma_p] \cup [q] = \left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\{\text{Galois 指標 } \rho : \pi_1(X_p) \to \{\pm 1\}\} \simeq \{\text{Hecke 指標 } : C_{X_p} \to \{\pm 1\}\} \;\; ; \;\; \rho \mapsto \mathcal{L}(\rho)$$

可換 Langlands 対応 (類体論)

$\downarrow$ 量子論

可換 Langlands 双対性 : $L(\rho, s) = L(\mathcal{L}(\rho), \mathfrak{s})$

(Artin L 関数) (Hecke L 関数)

■ Maxwell 電磁双対性

$$\begin{array}{ccc} H^2(M) & \overset{\text{Hodge } *}{\simeq} & H^2(M) \\ \text{電場 } E & \leftrightarrow & \text{磁場 } B \end{array}$$

$\downarrow$ 量子論

可換 S - 双対性 (Witten)

$$\begin{array}{ccc} Z(e) & = & Z(b) \quad (eb = 1) \\ \| & & \| \\ \int exp(-\frac{1}{e}\int F_A \wedge *F_A)\mathcal{D}\mathcal{A} & & \int exp(-\frac{1}{b}\int F_{A'} \wedge *F_{A'})\mathcal{D}\mathcal{A}' \end{array}$$

ただし, $F_A := E + B = dA$, $*F_A := dA'$.

謝辞： 原稿にコメントを下さった森下昌紀先生に感謝申し上げます.

参考文献

[Mo1] 森下昌紀, 結び目と素数, シュプリンガー現代数学シリーズ (第 15 巻), シュプリンガー・ジャパン, 2009.

[Mo2] 森下昌紀, 結び目と素数, 大学院 GP 数学レクチャーノートシリーズ (1), 2008 (記述：早坂紀彦, 今野大悟, 金城謙作).