有限表示群の JSJ 分解

藤原 耕二 (東北大学 大学院)
fujiwara@math.tohoku.ac.jp
幾何学シンポジウム（名古屋大学）
2000 年 7 月 31 日～8 月 2 日

1 幾何学的群論

離散群に関して、最近 10 年位の間に「群の分解に関する構造」についての基本的な結果が得られている．この講演では、それについて説明したい．

講演の主題の一つは，講演者の論文 [FP] であるが、論文の主定理（このノートでは定理 7.1) と証明についてだけでなく、背景にある関連する分野の諸結果や考え方についても述べたい．

離散群について、組合せ群論の視点からの研究は歴史が古い．その方面の代表的な教科書は [LS] である．離散群の研究の一つの転機は，Gromov の論文 [Gr] である。一言でいうと、Gromov は，離散群を幾何学的な対象と考え，幾何学的な手法で、（代数的な）諸結果を導きだす。また、この論文で導入された Hyperbolic 群という離散群の族は、いまに至るまで，重要な研究対象である。以降，Gromov 流の離散群の研究が活発に進展し，「幾何学的群論」と呼ばれることもある．

私見では、幾何学的群論には三つの基盤がある：

1. （組合せ）群論．
2. 非正・負曲率空間論．
3. 2・3 次元多様体のトポロジーと幾何．

それぞれの内容を表すキーワードやトピックを，ランダムに並べる (網羅的ではない）．

1.
   - 組合せ群論（生成元と関係式で表示された群の諸性質: 例えば，同型問題，語の問題の決定可能性や、その計算量の複雑度の評価など）．
   - one-relater 群（群の表示で関係式が一つから成り立つもの。曲面群など）．
   - Small cancellation 群（群の表示で関係式に現れる式の「重複部分」が少ない群．このような群は、扱い上，自由群と近い．Hyperbolic な

曲面群など）.

- Bass-Serre 理論（Simplicial ツリーに群が作用するときの固定化部分群を取り扱う）.
- Coxeter 群や Artin 群と、その有限次元表現など (具体的な表示を持つので扱いやすく、かつ, 数学のいろいろな場所に出てくる）.

2.
- 非正・負曲率多様体論（その境界での幾何学や剛性）.
- 基本群の剛性（Lie 群の離散群としてなど）.
- ツリーの幾何学.
- Gromov の Hyperbolic 空間.
- リー群の格子群（$SL(n, \mathbf{Z})$ など) と代数群.
- Tits building（非正・負曲率多様体の境界など）.

3.
- 曲面のトポロジーと幾何（幾何構造, 写像類群）.
- タイヒミュラー空間（曲面や 3 次元多様体の hyperbolic 計量のモジュライ）.
- 曲面の Geodesic lamination (曲面のタイヒミュラー空間のコンパクト化として）.
- 3 次元多様体の連結和分解, Torus-Annulus 分解, Seifert 空間, JSJ 分解.
- Klein 群の理論 ($PSL(2, \mathbf{R}), PSL(2, \mathbf{C})$ の離散部分群. 表現の存在, 変形, 剛性. 自己同型群の構造などの代数的構造).
- Thurston 理論, 3 次元多様体の Hyperbolization 予想.

また、共通部分としては次のような事項がある.

- （1 & 2）Gromov の Hyperbolic 群, Automatic 群. 有限表示群が, いろいろの代数的性質をもつための組合せ的／幾何的な十分条件. 群の境界と代数構造. 群の剛性（たとえば擬等長写像に関して）.
- （2 & 3）2、3 次元多様体の Hyperbolic 計量のモジュライ空間のコンパクト化と **R**-ツリーの理論（Morgan-Shalen 理論）. **R**-ツリーへの作用を持つ群の分類（Rips 理論）と、その Thurston 理論への応用.
- （1 & 3）空間の連結和と基本群の自由積 (Milnor の定理と Grushko の定理の対比）. 3 次元多様体の Characteristic submanifold の存在（Jaco-Shalen, Joohannson 分解）と有限表示群の JSJ 分解. Braid 群と写像類群, その有限次元表現.

2　群の分解と曲面の基本群

2.1　群の自由積と Grushko の定理

A, B を群とする．その自由積を $A * B$ と書く。A, B を基本群にもつ位相空間と X_A, X_Bとし、X を X_Aと X_Bを線分で結んでできる空間とすると

$$A * B \simeq \pi_1(X)$$

である。

逆に $G = A * B$ で、A, B が単位群でないとき、これを G の「自由積分解」と呼ぶ．ここで、さらに A が自由積分解可能とだとしよう：$A = A_1 * A_2$．これから $G = (A_1 * A_2) * B$ が得られるが, 自由積の順序は結果に影響しないので、これを $G = A_1 * A_2 * B$ と書いてもよい。このように、つぎつぎに, 自由積分解を繰り返すとどうなるだろうか？それに関して、次の定理がある。自明でない仕方で自由積に分解しない群を、「自由積分解不能」な群の呼ぶ.

記法 2.1 ランクが r の自由群を F_r と書く.

次の定理は G の自由積分解が, ある意味で一意に存在することを言っている.

定理 2.1 (Grushko [LS]) G を有限生成な群とする。G は次のように自由積に分解する：

$$G = (*_{i=1}^{n} G_i) * F_m,$$

ここで、G_iは自由積分解不能で非自明な群で, さらに $G_i \not\simeq \mathbf{Z}$. さらに、$G$ のこのような分解について、整数 m, n と 部分群 G_i（それぞれが、G の内部自己同型を除いて）は一意的に決まる.

2.2　HNN 拡大と融合積

A, B, C を離散群とする。

$$f_A : C \to A, f_B : C \to B$$

を, それぞれ単射な準同型写像とする．このとき自由積 $A*B$ に関係式 $f_A(c) = f_B(c), c \in C$ を考えることにより得られる群を $A *_C B$ とかき、A と B の 「C についての融合積」と呼ぶ． 形式的には、$A * B$ のなかで元の集合 $\{f_A(c)f_B(c)^{-1}\}_{c \in C}$ が生成する正規部分群を N とすれば、$A *_C B = (A * B)/N$ である。また、これは群 A と B を, C に沿って, 準同型写像 f_A, f_Bを使って「貼りあわせた」と言っても良い.

A, C を離散群とする.

$$f_1 : C \to A, f_2 : C \to A$$

を, それぞれ単射な準同型写像とする. ここでシンボル t の生成する無限巡回群 $< t > \simeq \mathbf{Z}$ を考え, それと A との自由積 $A* < t >$ を考える. この群に次のような関係:

$$tf_1(c)t^{-1} = f_2(c), c \in C$$

を考えて得られる群を $A*_{C, f_1 \cdot f_2^{-1}}$ (または単に $A*_C$) と書き, A の「HNN 拡大」とよぶ。これは群の表示としては, 次のように書ける。

$$A*_C = \{A, t | tf_1(c)t^{-1} = f_2(c), c \in C\}.$$

定義 2.1 G が, ある部分群 C について, 非自明な融合積または *HNN* 拡大で書けるとき G は 「(C 上) 分解する」という。

2.3 曲面上の単純閉曲線

向き付け可能な閉曲面 S 上の単純閉曲線 c が生成する, 曲面の基本群 G の 部分群を $C \simeq \mathbf{Z}$ とする。C は G の非自明な分解を与える (ファンカンペンの定理による)。ただし、c は一点にホモトピックでないとしている。$S \backslash c$ の連結成分が一つなら, HNN 拡大, 二つなら, 融合積である.

このように単純閉曲線で曲面を切ることにより得られる, 基本群の分解を「トポロジカルな分解」と呼ぼう.

逆に, 閉曲面の基本群の $\mathbf{Z}$ 上の分解はトポロジカルなものに限るだろうか? これについて、次の定理が知られている [Z].

定理 2.2 S を向き付け可能な閉曲面とする。G をその基本群とする。$G = A *_C B, A*_C$ を G の分解とし、 $C \simeq \mathbf{Z}$ とする。このとき、S 上にある単純閉曲線 c があって、S を c に沿って切ることで, 与えられた分解が得られる (G の内部自己同型を除いて).

2.4 二つの分解の compatibility

$G = A *_C B$ とする。さらに $B = B_1 *_D B_2$ とする。$C \subset B_1$ としよう (ここでは C を B の部分群と見ている. また、このようなとき, 先の二つの分解は 「compatible」 であると言う). このとき、$B = B_1 *_D B_2$ を $G = A *_C B$ に「代入」することで、

$$G = A *_C B_1 *_D B_2$$

を得る.

この分解から, D についての分解を無視することで、$G = A *_C B$ が得られるだけでなく, C についての分解を無視することで $G = P *_D B_2$, (ただし $P = A *_C B_1$) も得られることに注意しよう. 一般に, このように分解の一部を無視して、より「大雑把な」分解を得ることを「collapsing」という。Collapsing の逆操作（すなわち上で compatible な分解を代入した操作）を「blowing up」と呼ぶ.

2.5 二つの単純閉曲線の compatibility

向き付け可能な閉曲面 S に, 二つの単純閉曲線 c_1, c_2 を考える。c_2とアイソトピックで c_1と交わらないものがあるとき この組は 「compatible」 と呼ぶ. c_1, c_2に対応する部分群を C_1, C_2として、S の基本群 G の C_1, C_2に沿った分解を考える. ここで、c_1, c_2が compatible とする。分解を考える上では、c_1, c_2が互いに交わらないとしてよい。このとき、それらの S での dual グラフをとることで、二つの分解を同時に表現する G のグラフ分解がとれることが見てとれる.

3 「群のグラフ」と群の「グラフ分解」

3.1 群のグラフ

前に述べた $G = A *_C B_1 *_D B_2$は模式的に二辺を持つ線状のグラフの 3 頂点に群 A, B_1, B_2, 対応する二辺に群 C, D を割り当てて考えることができる。このようなものを一般化したものを, 群 G の 「グラフ分解」と呼ぶ. グラフのそれぞれの辺が融合積または HNN 拡大に対応している. 上で述べた Collapse は、幾何学的に対応する辺の collapse に対応している. Blow up も同様に見てとれる.

「群のグラフ」とは、連結な有限グラフ Γといくつかの群と準同型の組で次のような性質を満たすものである。各辺 e と 各頂点 v に, 群 G_e と 群 G_v が割り当てられ, さらに、各辺 e の端点 v_1, v_2 （$v_1 = v_2$ の場合もある）について単射準同型

$$f_i : G_e \to G_{v_i}, (i = 1, 2)$$

が与えられている. これらの情報を簡単に $(\Gamma, \mathcal{G})$ と書く.

$(\Gamma, \mathcal{G})$ に対して, 各辺ごとに融合積, または HNN 拡大を順々に考え, 結果として得られる群を、群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ の「（Bass-Serre の意味での）基本群」とよび、$\pi_1(\Gamma, \mathcal{G})$ と書く.

一方, G が, ある群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ について $G \simeq \pi_1(\Gamma, \mathcal{G})$ の時, $(\Gamma, \mathcal{G})$ を G の 「グラフ分解」とよぶ。

群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ で、Γ のいくつかの辺を collapse することで、$(\Gamma', \mathcal{G}')$ が得られるとする。このとき、

$$\pi_1(\Gamma, \mathcal{G}) \simeq \pi_1(\Gamma', \mathcal{G}')$$

である。また、$(\Gamma, \mathcal{G})$ のとなり合う二辺を同一視して得られるグラフをΓ_1 とし、対応して edge 群, vertex 群, 準同型も適切にとり直して得られる群のグラフ $(\Gamma_1, \mathcal{G}_1)$ についても

$$\pi_1(\Gamma, \mathcal{G}) \simeq \pi_1(\Gamma_1, \mathcal{G}_1)$$

となる。この隣り合う二辺を「束ねる」操作を「folding」と呼ぶ. 一般に folding は, $(\Gamma, \mathcal{G})$ の Bass-Serre の意味での普遍 cover であるツリー上のとなりあう二辺で行なうのだが、ここでは詳しく述べない. たとえば $G = A * B * C$ は二つの辺を持つ群のグラフだが、この二辺を fold すると G の分解 $G = B * P$ が得られる. ここで $P = A * C$ である。

最後に, 群のグラフの一つの辺 e をいくつかの辺 $e_1, \cdots, e_n$ に分割する操作について述べる. 同じことだから、グラフが一つの辺からなる時に説明する。対応する分解を $G = A *_C B$ とすると、辺を n 個に分割した後に対応するグラフ分解は

$$A *_C C *_C C *_C \cdots *_C B$$

（ただし、上で $*_C$ は n 個ある）である。これだけでは、無意味な操作であるが（このようなグラフ分解は「reducible」と呼ばれるものである）、応用上は, この分割後の短い辺を, 他辺との folding に使う. もともとの意味での folding では, ある辺を隣の辺の一部と fold する操作に対応している。

3.2 「Surface タイプ」の vertex 群

$(\Gamma, \mathcal{G})$ を群 G のグラフ分解とする。v を一つの頂点とし、$e_1, \cdots, e_n$を v での辺とする。あるコンパクトな曲面（境界があるかも知れない）Σ があって、次を満たす時, 頂点 v は 「surface タイプ」という。Σの境界の連結成分を $C_1, \cdots, C_m$ とする。

1. $G_v = \pi_1(\Sigma)$.
2. $G_{e_i} \simeq \mathbf{Z}$.
3. $n \leq m$. さらに、$i \leq n$ なら $G_{e_i} \to G_v$ は inclusion $C_i \to \Sigma$ から induce される.

注意 3.1 $(\Gamma, \mathcal{G})$ を群 G のグラフ分解とする。G_v が *surface* タイプとする。このとき G_v に対応する Σ 上の 単純閉曲線 c に対応する部分群 C は G_v の分解を与えるが, この分解は自然に G の分解に拡張する。このように得られ

る G の分解を *(surface* タイプの *vertex* 群における*)*「トポロジカルな分解」と呼ぶ.

4 Dehn ツイスト

4.1 融合積の Dehn ツイスト

$G = A *_{<c>} B$ で $<c> \simeq \mathbf{Z}$ とする。写像

$$b \in B \to cbc^{-1} \in B$$

は B の自己同型写像であるが（ここでは、簡単のために$<c> \subset B$ とみている)、これと A 上の恒等写像を「張り合わせる」ことにより、G の自己同型写像がえられる。これを $<c>$ についての 「Dehn ツイスト」 と呼ぶ.

注意 4.1 *多くの場合, この Dehn ツイストは G の外部自己同型群の非自明な元を定める.*

4.2 曲面の Dehn ツイスト

向き付け可能な閉曲面 S を, その上のある単純閉曲線 c（一点にホモトピックでないとする）にそって切って, 切口で 360 度ねじって, 再びはりあわせるという S の位相同型写像を c についての 「Dehn ツイスト」という。c に沿っての Dehn ツイストは, c に対応する部分群 $\simeq \mathbf{Z}$ についての（代数的な）Dehn ツイストを S の基本群 G に引き起こす.

さて, このように 単純閉曲線 c のついての Dehn ツイストは G の外部自己同型群 $Out(G)$ の元を定めるが, これらが $Out(G)$ を生成するのは、古典的な事実である：

定理 4.1 *S 上に有限個の単純閉曲線 c_i があって、それらについての Dehn ツイストは $Out(\pi_1(S))$ を生成する.*

定理 4.2 (Sela) *G を Gromov の意味での Hyperbolic な群とする. G に有限位数の元はなく、かつ、G は非自明な自由積に分解しないとする。このとき、次のような, 無限巡回群に同型な部分群 C_iが有限個存在する：G はそれらに沿って分解し、それらに対応する Dehn ツイスト が 生成する $Out(G)$ の部分群は有限位数である.*

この定理は次のような系をもつが、これは以前に知られていた.

定理 4.3 (Paulin-Rips) *G を Gromov の意味での Hyperbolic な群とする. G に有限位数の元はなく、かつ、G は非自明な自由積に分解しないとする。*

このとき, もし $Out(G)$ が無限なら、無限巡回群に同型な部分群 C が存在して G はそれに沿って分解する。

注意 4.2 この定理には *3* 次元の *Hyperbolic* 多様体の *Hyperbolic* 計量の一意性／モジュライについての現象が背景にある。

5 Bass-Serre 理論の紹介

このセクションでは、Bass-Serre 理論を簡単に紹介したい。基本的な文献は、[Se] である. 以下で, ツリーとは simplicial なツリーで（常に連結である)、各辺の長さを 1 として、距離空間としている. 群 G のツリー T への作用は、常に simplicial、等長的で、一つの辺を「ひっくり返す」ようなことは無いとする.

5.1 ツリーへの作用から見た群のある性質

群 G が ツリー T に作用していて、T の空でない（連結な）サブツリーで G-不変なものがないとき、この作用は 「minimal」 という。群 G が ツリー T に作用していているとき、G-不変なサブツリーで, G の作用が minimal なものは常に存在する.

ツリーへの minimal な作用が自明なもの（すなわち, ツリーが一点である時）しかない群は、「property FA」を持つという。例えば, 有限群は property FA をもつことは簡単にわかる. また、$SL(3, \mathbf{Z})$ も property FA を持つことが知られている. これから、下で述べる定理 5.1 によれば、$SL(3, \mathbf{Z})$ は融合積に分解しないことが分かる.

5.2 群のグラフ分解の「普遍被覆」

次が知られている（ややあいまいな記述である）.

定理 5.1 *([Se])* $(\Gamma, \mathcal{G})$ を群 G のグラフ分解とする。このとき、ある *simplicial* ツリー T と, そこへの G の等長変換による作用があって次を満たす.

1. $T/G = \Gamma$.
2. Γ の各 *edge* e *(*または 各 *vertex* v*)* に対応する群 $G_e (G_v)$ は、e *(*v*)* に対応する T の ある *edge (vertex)* の固定化部分群である。

一方, 逆に, ある有限生成な群 G が, ある *simplicial* ツリー T に等長変換によって *minimal* に 作用しているとき, その商グラフ（自動的に有限である）をΓとし、それぞれの頂点, 辺の群を T での対応する固定化部分群として群のグラフ $(\Gamma, \mathcal{G})$ を作ると, その基本群は G に同型.

この定理から、群のグラフ分解と, ツリーへの作用が「同値」であることが分かる. 定理で与えられるツリーを, 群のグラフに対応する「Bass-Serre ツリー」と呼ぶ。

群のグラフからツリーを得る部分の分かりやすい例は, 曲面 Σ 上の互いに交わらない二つの単純閉曲線 c_1, c_2 についてのグラフ分解である。Σ を hyperbolic とし、c_1, c_2 を測地線で実現して、Σ の普遍 cover X を考える. c_1, c_2 は X で 互いに交わらない測地線の族を定めるが, その dual ツリーが求めるものである。Σ の基本群 G が, このツリーに作用するのも見てとれるだろう.

5.3 ツリーの幾何学

定理 5.1 を手がかりに群を分解について理解するために, ツリーの等長変換について考える.

命題 5.1 *T を simplicial ツリーとする。g を T の等長変換とする。このとき次の二つのうち一つが成り立つ.*

1. *g は T に固定点 p を持つ。*
2. *$\mathbf{R}$ に等長なライン l が T の中に存在して, g は l に、非自明な「ずらし」として作用する。*

証明で本質的な点は、T における距離関数が convex であることである。上のそれぞれの場合, g を次のように呼ぶ.

1. elliptic.
2. hyperbolic（上の l を 「軸」と呼ぶ）.

Hyperbolic な空間の等長変換が, elliptic, parabolic, hyperbolic に分類されるのは良くしられている。これは、自然な境界をつけてコンパクト化した空間での, 固定点についての分類に対応している。上の結果から、ツリーの等長変換には, parabolic な元がないことが分かる.

6 3次元多様体論から

6.1 Seifert 空間

前に曲面 Σ の基本群の $\mathbf{Z}$ に関する分解と、Σ 上の単純閉曲線 c の関係について述べた. $\Sigma \times S^1$ を考える. その基本群 $G = \pi_1(\Sigma \times S^1)$, は $c \times S^1$の定めるトーラスの基本群 について分解する。これは、多様体 M が Σ上の S^1-バンドルでも同じである. このとき、G は次のような完全系列を持つ. $\mathbf{Z}$ は, ファイバーの S^1に対応している.

$$0 \to \mathbf{Z} \to G \to \pi_1(\Sigma) \to 1.$$

さて、3 次元多様体のなかに「Seifert 空間」と呼ばれる族がある。これは、2-orbifold Σ 上の S^1-バンドルとも言える．このとき対応する完全系列は

$$0 \to \mathbf{Z} \to G \to \pi_1^{orb}(\Sigma) \to 1$$

となる。$\pi_1^{orb}(\Sigma)$ は orbifold の意味での基本群である。この時, Σ 上の単純閉曲線 c は、対応する部分群についての G の分解を与える．また、このような G が, あるグラフの群の頂点群として現れ, さらに, その頂点での それぞれの edge 群がΣの境界に対応する部分群であれば, c についての分解が全体に拡張するのも明らかだろう．また, このような分解を「トポロジカルな分解」と呼ぶのも前と同様である．

6.2 3 次元多様体の JSJ（Jaco-Shalen, Johannson）分解

M を向き付けられた 3 次元のコンパクトな多様体とする。簡単のため、境界はないとする。M に埋め込まれた S^2で M を二つに分けるものを考える．これは M の連結和分解 $M = M_1 \sharp M_2$をあたえる。以下, 非自明な分解を与えるものだけ考えよう．次に M_1と M_2 についても同様のことを考える．これは, すなわち、M に埋め込まれた, 互いに交わらない有限個の S^2 の族を考えることになる。このような族で maximal なものが存在し、さらに、それらは M の isotopy を除いて一意であることも知られている (Milnor)．このように得られる $M = \sharp_i M_i$ を「prime 分解」という。このとき、M の基本群 G は $G = *_i \pi_1(M_i)$ のように自由積に分解している。

さて、上の M_i にもう「本質的な」 S^2はないから、次に、M_i に埋め込まれたトーラス T を考える．本質的な S^2を含まないで、かつ、$S^2 \times S^1$に位相同型でもないものを 「irreducible」 という。簡単のため M_iを M と書く．$\pi_1(T) \to \pi_1(M)$ が injective になるものだけ考えよう．このようなトーラスを「本質的」だという。たとえば、 M が Seifert 空間なら, 豊富に本質的なトーラスを含むことは前に述べた。M を本質的なトーラスで切ると, M の基本群の $\mathbf{Z}^2$ 上の分解を与える．次の定理が知られている．

定理 6.1 *(Jaco-Shalen[JSh], Johannson) M を 3 次元多様体で、向き付け可能, コンパクト, 境界なし, irreducible とする。このとき、有限個の互いに交わらない, 本質的なトーラス $\{T_i\}_i$ が存在して（空集合でもよい）次を満たす.*

1. M から $\{T_i\}_i$を除いて得られる多様体の各連結成分 M_jは, つぎのいずれかを満たす。

(a) M_j は Seifert 空間.

(b) M_j *の* 本質的なトーラスは M_jの境界のトーラスにホモトピック*. (*トーラスを含まないという意味で「*atoroidal*」と呼ばれる）*.*

2. M の 本質的なトーラスは*,* 上の *Seifert* 空間の一つのなかにホモトピック*.*

この定理により、M はトーラスを豊富に含む部分と、全く含まない部分に, きれいに分かれ, さらに、M のなかの本質的なトーラスは ある Seifert 空間の中にホモトピックである。その意味で, この定理は M の本質的なトーラスを全て記述していて, これは, 大体, M の基本群の $\mathbf{Z}^2$ についての分解をすべて記述することに対応している.

また、この分解は Thurston の予想の基礎になる理論である。もし、上のトーラスの族が空でなければ、各連結成分で Seifert でない部分は有限体積の Hyperbolic 空間であることが Thurston の定理で示されている.

この M の分解を 3 人の名前の頭文字を取って、「JSJ 分解」とよぶ。また、Seifert 空間の部分を「characteristic submanifold」ともよぶ。M の JSJ 分解は, その基本群の $\mathbf{Z}+\mathbf{Z}$ に関するグラフ分解を与えている。

7 群の JSJ 分解

7.1 定理

定義 7.1 群 G の すべての部分群が有限生成のとき G を「*slender*」 という。とくに G は有限生成.

例 7.1 *1.* 有限生成アーベル群は *slender* である*.*

2. 有限生成 *nilpotent* 群は *slender.*

3. ランクが *2* 以上の自由群を G が含めば G は *slender* でない。

4. Solvable な群は一般に *slender* でない。

Slender な群は, ツリーへの作用について、顕著な性質をみたす。

命題 7.1 Gを *slender* とし、ツリー T に作用しているとする。このとき、T には作用の固定点があるか、または、G-不変なラインがある。

主定理を述べるために, Seifert 空間の基本群を、群論的に一般化しよう。ある 2-orbifold Σ と slender な群 F が存在して, 次のような完全系列を持つ群 G を 「slender な ファイバーを持つ Seifert タイプ」の群と呼ぶ.

$$0 \to F \to G \to \pi_1^{orb}(\Sigma) \to 1.$$

前と同様に Σの上の単純閉曲線 c に対応する G の部分群 C（slender である）は、G を分解する。このような分解も「トポロジカルな分解」と呼ぶ。さらに、このような G が グラフ分解の vertex 群に現れ, そこでの edge 群が適当

な条件をみたせば（前と同じように, Σ の境界に対応するという条件である）G の分解は全体に拡張する。この分解も「トポロジカルな分解」と呼ぼう.

普通の意味での Seifert 空間の場合, 上の F は $\mathbf{Z}$ である。例えば F として $\mathbf{Z}^2$ をとれば G の $\mathbf{Z}^3$ についての分解が記述できる。次が講演の主定理である。

定理 7.1 *(JSJ分解 [FP])* G を有限表示な群とする。この時, G のあるグラフ分解 $(\Gamma, \mathcal{G})$ が存在して, 次を満たす.

1. *Edge* 群はすべて *slender.*
2. いくつか（空かもしれない）の *vertex* 群は、*slender* な群をファイバーとする *Seifert* タイプの群.
3. $G = A *_C B$ または $A*_C$ を *slender* な部分群 C についての分解とすると、これは、$(\Gamma, \mathcal{G})$ から, 次のような三種類の操作を有限回行なえば得られる.
   - (a) 一つの *Seifert* タイプの *vertex* 群のトポロジカルな分解.
   - (b) *edge* の分割と *folding.*
   - (c) *edge* の *collapsing.*

さらに $(\Gamma, \mathcal{G})$ は次のような意味で一意的である：

1. 上のような条件を満たす別の $(\Gamma', \mathcal{G}')$ があれば、$(\Gamma', \mathcal{G}')$ は $(\Gamma, \mathcal{G})$ から, 有限回の次のような操作で得られる.
   - (a) *edge* の分割と *folding.*
   - (b) *edge* の *collapsing.*
2. 上のような条件を満たす $(\Gamma, \mathcal{G})$ の *Seifert* タイプの *vertex* 群 $\{S_1, \cdots, S_n\}$ のそれぞれは G の内部自己同型を除いて一意に決まる.

定義 7.2 上の定理で得られる群 G のグラフ分解 $(\Gamma, \mathcal{G})$ を G の「*JSJ*分解」と呼ぶ.

注意 7.1 1. この定理は *Grushko* の定理（定理 *2.1*）と見かけが似ている.

2. また、*3*次元多様体の *JSJ*分解にも、非常に良く似ている. しかし、*3*次元多様体の基本群に, 上の定理を適用しても、トポロジカルな *JSJ*分解は, 直ちには従わない.
3. 群論の *JSJ*分解の存在の証明に、*3*次元多様体の *JSJ*分解は使わない.
4. *Rips-Sela([RS])* によって、$C \simeq \mathbf{Z}$ の場合には、定理は知られていた.
5. *Dunwoody-Sageev([DSa])* によって、C が *slender* で、分解にある条件がつく場合にも、類似の結果が知られている.

7.2 定理の証明

定理の証明は大きく二つの部分からなる。$\{G = A_i *_{C_i} B_i$または $A_i *_{C_i}\}_{i \in I}$ を, G の slender な部分群についての分解で, 互いに異なる, すべてのもののリストとしよう。I は高々可算である。

1. まず、G のグラフ分解についてのあるプロセスを定義する. これによって, グラフ分解の系列 $\{\Gamma_n\}_n$ が得られるのだが、各 n について, 与えられた分解の始めの n 個である $\{G = A_i *_{C_i} B_i$または $A_i *_{C_i}\}_{1 \le i \le n}$ は Γ_n から、定理の結論の三つの操作で得られる.
2. 次に, このプロセスが有限回で安定（終了といってもよい。すなわち、プロセスのアウトプットが一定になる状態）することを言う. そのために、G のグラフ分解に, ある複雑度を定義し, プロセスが進行するたびにそれが増大することを言う. 一方, G が有限表示であることから、この複雑度に上界があることが分かり, プロセスの終了が保証される。

さて、1 のプロセスを説明する。Γ_1は $\{G = A_1 *_{C_1} B_1$または $A_1 *_{C_1}\}$ そのものとすればよい。よって Γ_2の作り方を示す。以降のステップは、同様の構成によるので、述べない. 技術的には, より複雑になるが, 原理的には最初のステップと同じである。

さらに、ここでは、簡単のために次を仮定する.

1. G は torsion-free で, 非自明な自由積に分解しない。この仮定の「非自明な自由積に分解しない」v の部分は、ある意味で, あまり強くない. G に Grushko の定理を適用すれば、その各コンポーネントは、この仮定を満たすから, それらに, このプロセスを適用すればよい。
2. $$C_1, C_2 \simeq \mathbf{Z}.$$
   この仮定は, ある意味で本質的である。実際, Rips-Sela([RS]) の方法は, $\mathbf{R}$-ツリーに作用する群の分類定理を使うのだが、そのためには, この仮定が必要である。一方, 我々([FP]) の方法は C が slender という仮定で適用できる。G が torsion-free なら、「一番小さい部分群」は無限巡回群であるこに注意. また閉曲面の単純閉曲線についての分解はこの場合である。

さて、上の仮定の下, 次が成り立つ.

命題 7.2 *([RS])* T_1, T_2 を $C_1 =< c_1 >, C_2 =< c_2 >$についての分解にそれぞれ対応する *Bass-Serre* ツリーとする。このとき次のどちらかが成立.

1. c_1は T_2に *elliptic* に作用し、c_2 も T_1に *elliptic* に作用する。
2. c_1は T_2に *hyperbolic* に作用し、c_2 も T_1に *hyperbolic* に作用する。

これは曲面上の二つの単純閉曲線 c_1, c_2の場合には、c_1が c_2と交わる（すなわち、c_1は T_2に hyperbolic に作用）なら、 c_2も c_1と交わる（c_2も T_1に hyperbolic に作用する）という自明の対称性のことである。

さて、曲面の場合がそうであったように、(1) の場合は (2) より取り扱いが易しい。よって (2) の場合だけ説明する。また、定理の証明では, この部分が一番, 重要である。基本的には、二つのツリーの product $X = T_1 \times T_2$ を考える. G の作用を

$$g(x_1, x_2) = (gx_1, gx_2)$$

と定める. これは、一般に非自明な固定化部分群をもつ。このとき, 商空間 X/G は正方形からなる complex である。この complex で「2 次元の Bass-Serre 理論」を展開することで,

$$\pi_1(X/G, \mathcal{G}) = G$$

が分かるが, これを手がかりに、正方形 complex の中に, 始めに与えられた二つの分解をトポロジカルに実現するような sub-surface を見つけ, その dual のグラフに Bass-Serre 理論を適用することで, もとめるグラフ分解 Γ_2 をえる。この部分を, 講演では, より詳しく述べたい。

次にこのプロセスが有限回で安定（すなわちグラフ分解に変化が起こらなくなる）することを次の事実から導く. 各プロセスで、得られる グラフ分解が直前のものと異なる場合, 次のどちらかの意味で, より複雑になっている。

1. ある Seifert タイプの vertex 群のベースの orbifold のジーナスが増える.
2. グラフ分解のグラフの辺の数が増える.

ところが、Seifert タイプの vertex 群のベースの orbifold のジーナス g には上界がある。それは、

$$G \to F_g$$

という全射準同型が存在するからである。よって g は G の生成元の数を越えない.

次に, グラフの辺の数にも上界があることが次の定理からわかる。(技術的には、直ちには従わないが、本質的にはよい）群が small であることの定義は F_2を部分群として含まないことである。Slender なら small であることは容易にわかる。グラフ分解が reduced であることの定義はここでは述べないが、あまり本質的な条件ではない. このように、グラフ分解の複雑度の上界を与えるタイプの結果を, accessibility theorem と呼ぶことが多い.

定理 7.2 *([BFe])* G を有限表示の群とする。このときある自然数 n が存在して, G のグラフ分解が次の仮定を満たすなら, グラフの辺の数は n を越えない.

1. グラフ分解の, すべての *edge* 群は *small.*
2. グラフ分解は *minimal* かつ *reduced.*

以上より, プロセスは有限回で安定する。その安定状態のグラフ分解が求めるものであることは、プロセスに現れるグラフ分解への要求から明らかだろう。

参考文献

[BFe] M.Bestvina, M.Feighn, Bounding the complexity of simplicial group actions on trees, Invent. Math. 103, pp.449-469, 1991.

[DSa] M.Dunwoody, M.Sageev, JSJ-Splittings for finitely presented groups over slender groups,. Invent. Math.135(1999), no.1, 25–44.

[FP] K.Fujiwara, P.Papasoglu, JSJ decomposition of finitely presented groups and complex of groups, preprint.

[Gr] M. Gromov, Hyperbolic groups, in ”Essays in Group Theory” edit. by S.M. Gersten, MSRI Publ. Vol 8, Springer, 1987, 75-263.

[JSh] W.Jaco, P.Shalen, “Seifert fibered spaces in 3-manifolds” Memoirs of the AMS 220, 1979.

[LS] R. Lyndon, P. Schupp, *Combinatorial Group Theory,* Springer, 1977.

[RS] E.Rips, Z.Sela, Cyclic splittings of finitely presented groups and the canonical JSJ decomposition, Annals of Math. 146, pp.53-109, 1995.

[Se] J.P. Serre, “Trees”, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[Z] H.Zieschang, E.Vogt and H.Coldeway “Surfaces and planar discontinuous groups” Lecture Notes in Math., no.835, Springer Verlag, 1980.