双曲性と擬準同型

藤原　耕二

2007 年度幾何学シンポジウム[1]
2007 年 8 月 24 日－ 27 日　鹿児島大学

1. CAT(0) 幾何と δ-双曲幾何

1.1. CAT(0) 幾何. 測地空間 X の任意の測地三角形がユークリッド平面での比較三角形より幅広くないとき、**CAT(0) 空間**とよぶ。くわしく言うと、任意の測地三角形 Δ の三頂点を a, b, c とし、三辺をなす測地線を $[a, b], [b, c], [c, a]$ とする。A, B, C をユークリッド平面の三点で三辺 $[A, B], [B, C], [C, A]$ の長さが Δ と等しいとする。任意の点 $p \in [a, b]$ にたいして、対応する点を $P \in [A, B]$ とする。すなわち、$d(a, p) = d(A, P)$ となる点である。このとき次が成立する。

$$d(c, p) \le d(C, P).$$

CAT(0) 空間では、二点を結ぶ測地線は一つである。ユークリッド空間はもちろん CAT(0) だが、完備で単連結なリーマン多様体の断面曲率が 0 以下なら CAT(0) である。とくに、非コンパクト型の対称空間は CAT(0) である。CAT(0) 幾何については [7],[1] を参照せよ。

1.2. δ-双曲幾何. 測地空間 X と定数 $\delta \ge 0$ について次が成立するとき、X を **δ-双曲空間**という。「Δ を測地線 α, β, γ を三辺とする任意の測地三角形とする。このとき、α は $\beta \cup \gamma$ の δ-近傍に含まれる。」ある δ について δ-双曲的なとき、たんに双曲的とよぶこともある。

もっとも標準的な例として、n 次元の双曲空間 $\mathbb{H}^n$ は双曲的である。より一般に、完備で単連結なリーマン多様体 M について、ある定数 $c < 0$ が存在して断面曲率 K がいたるところ $K \le c$ なら M は双曲的である。とくに、(非コンパクト型の) 対称空間はランクが 1 なら双曲的で、ランクが 2 以上なら双曲的でない。次元が 2 以上のユークリッド空間は双曲的でない。δ-双曲幾何については [14],[7] を参照せよ。

1.3. 新しい公理系 ([6]). δ-双曲空間は CAT(0) 空間とは限らない。しかし、この両方の幾何に共通する定理は多く存在する。統一的な議論を可能にする設定として、この二つの幾何を含むような公理系について述べる。

(X, d) を測地空間とする。二点 a, b を結ぶ測地線を (一意的とは限らないが) $[a, b]$ と書くことにする。距離 $d(a, b)$ を簡単のため $|a-b|$ とも書く。測地線 $[a, b]$ と点 $x \in X$ にたいして、$\pi_{ab}(x)$ を $[a, b]$ の点で x への距離が最小の点の集合とする。

定数 $C > 0$ を固定する。一つ目の公理は射影 π_{ab} に関するものである。

公理 (DD) 任意の $p \in \pi_{ab}(x)$ と任意の $p' \in \pi_{ab}(x')$ に対して次が成り立つ。

$$|p - p'| < |x - x'| + C.$$

とくに、集合 $\pi_{ab}(x)$ の直径は $< C$.

Date: 2007.8.25, version 2.
[1]予稿集における、定理 3.2 の誤植などを訂正した

次の公理は二点を結ぶ測地線の一意性に代わるものである。
公理 (FT) $|a-a'|\le D, |b-b'|\le D$ とする。このとき、$[a',b']$ は $[a,b]$ の $(C+D)$-近傍に含まれる。とくに、a から b への任意の二つの測地線は、互いの C-近傍に含まれる。

命題 1.1. *CAT(0)* 空間と δ-双曲空間は、ある定数 C について公理 *(DD)* と *(FT)* を満たす。

2. 擬準同型

群 G 上の関数 $f:G\to\mathbb{R}$ が**擬準同型**とは次が成立すること。

$$\sup_{a,b\in G}|f(a)+f(b)-f(ab)|=D(f)<\infty.$$

$D(f)$ を defect と呼ぶ。有界な関数は擬準同型であるが、これらは有用でないので、それを除くためにも次の定義を導入する。擬準同型 f が**均質**とは、任意の n と $a\in G$ について次が成り立つこと。

$$f(a^n)=nf(a).$$

準同型は均質な擬準同型である ($D(f)=0$).

G 上のすべての均質な擬準同型がなすベクトル空間を $\mathrm{HQH}(G)$ と書く。コホモロジーの定義によれば、G 上のすべての準同型 $f:G\to\mathbb{R}$ がなすベクトル空間は $H^1(G;\mathbb{R})$ である (ここでは単に $H^1(G)$ とも書く)。したがって

$$H^1(G,\mathbb{R})<\mathrm{HQH}(G).$$

G が k 個の元で生成されるなら $\dim H^1(G)\le k$ である。

2.1. 存在定理.

次の G について $\mathrm{HQH}(G)$ が $H^1(G)$ より真に大きいことが知られている。これらの群は有限生成なので $\dim H^1(G)$ は有限次元であるが、一方、これらの $\mathrm{HQH}(G)$ は無限次元である。曲面の写像類群については [16] を参照せよ。

1. 階数が２以上の自由群 (Brooks [8])
2. 初等的でない双曲群 (Epstein-Fujiwara [11])
3. コンパクトな双曲型の曲面 S （すなわち、基本群が巡回群を有限指数の部分群として持たない）の写像類群 $\mathrm{Mod}(S)$ (Bestvina-Fujiwara[4]).
4. ランク１の半単純リー群の離散部分群で、ベキ零群を有限指数の部分群で含まないもの (Fujiwara [12]).
5. 融合積または HNN 拡大でかかれる群である仮定を満たすもの (Fujiwara [13]).

これらは実際に $\mathrm{HQH}(G)$ の一次独立な元を加算無限個構成することで示される。Brooks が自由群において行った組み合わせ的な構成を、δ-双曲幾何をつかって拡張することで２，３，４，５についても示すことが出来ている。

2.2. 消滅定理.

この章では $\mathrm{HQH}(G)=H^1(G)$ となる群の例をいくつか述べる。

定理 2.1 (Gromov-Bavard[15][3])**.** *G がアメナブルなら $\mathrm{HQH}(G)=H^1(G)$ である。*

アメナブルの定義は述べない。可解な部分群を有限指数で含む群はアメナブルである。一方、階数 2 の自由群を部分群として含む群はアメナブルでない。

次の消滅定理は深い結果である。

定理 2.2 (Burger-Monod [9],[10], cf.[17])**.** *L を半単純なリー群とし、そのランクは 2 以上とする。$G<L$ を既約な格子部分群とする。このとき、$\mathrm{HQH}(G)=0$.*

この定理の G について $H^1(G)=0$ は知られていた（松島）。Burger-Monod は $\mathrm{HQH}(G)=H^1(G)$ を示した。

群 G が既約とは、有限指数の部分群で非自明な直積 $A\times B$ となるものがないことである。定理の具体的な適用例として、次がある。

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})<\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), n>2.$$

リーマン多様体の言葉で述べるなら、有限な体積をもつ局所対称空間 M のランクが 2 以上で、その基本群 G が既約なら定理を適用できる（この場合、基本群の既約性は、M が多様体の直積を有限被覆に持たないのと同値である）。

注意として、M のランクが 1 なら $\mathrm{HQH}(G)$ は無限次元である ([12]).

3. 主結果

3.1. ランク１. CAT(0) 空間 X の無限測地線 γ が**ランク１**とは γ が X の中でユークリッド半平面を張らないことである。すなわち、等長的かつ全測地的に埋め込まれた半平面で γ を境界にもつものが X にないこと。X が δ-双曲空間でもあれば、任意の測地線はランク１である。一方、ランクが２以上の対称空間の任意の測地線はランク１でない。

X の等長変換 a が**ランク１**とは、a で不変なランク１の測地線 γ があること。これらについては [1] を参照せよ。

3.2. ランク剛性定理. １９７０－８０年代に対称空間が距離幾何の観点からさかんに研究された。その決定的な結果としてランク剛性定理がある。これは、ランクが２以上の局所対称空間を、距離幾何の言葉を使って、ランクの情報を含めて特徴付けるものである。ここでは、ランクが２以上の場合だけ述べる（同様にランクが３、ランクが３以上などを特徴付けることが出来る）。

定理 3.1 (ランク剛性定理. Ballmann,Eberlein, ... cf.[1])**.** *M を完備で体積有限なリーマン多様体で曲率は $K\le 0$ とする。基本群は既約とする。このとき次の二つは同値である。*
1. M はランクが２以上の局所対称空間である。
2. M の任意の閉測地線を M の普遍被覆へ持ち上げて得られる測地線 γ はランク１でない（つまり、γ は半平面を張る）。

3.3. 主結果. 次が主定理である。

定理 3.2 (Bestvina-Fujiwara[6])**.** *M を完備で体積有限なリーマン多様体で曲率は $K\le 0$ とする。次元は２以上とする。M の基本群 G は既約とする。このとき次は同値である。*
1. M はランクが２以上の局所対称空間である。
2. $\mathrm{HQH}(G)=H^1(G)$.

証明には定理 2.2 の逆が正しいことを示せばよいが、その部分の概略を書く。ランク剛性定理を使えば、ランク１の元 $a\in G$ があるとき、$H^1(G)$ に含まれないような $\mathrm{HQH}(G)$ の元があることを示せばよい。議論としては、存在定理の章で述べた δ-双曲幾何での擬準同型の構成の一般化が、ランク１の元に適用できる。実はこの構成は、1.3 章でのべた公理系 (DD) と（FT) のもとで行える。すなわち、δ-双曲幾何と CAT(0）幾何でランク１の元がある場合の両方に通用する。ただし、δ-双曲空間の場合は、ランク１に対応する性質を距離幾何の言葉で言い換える。

注意として、定理に現れる多様体 M の基本群は有限生成であることが、やはり８０年代の成果として分かっている。一方、$\mathrm{HQH}(G)$ が $H^1(G)$ より大きいときは、$\mathrm{HQH}(G)$ は無限次元であることも証明から分かる。

定理 3.2 によれば、ある条件をみたすリーマン多様体 M がランクが２以上の局所対称空間であるかは、その基本群だけで決まる。これは１９８０年代に知られていた。そのころ得られていた次の結果は定理 3.2 から容易に従う。

定理 3.3 (Ballmann-Gromov-Schroeder[2])**.** M を完備で体積有限なリーマン多様体で曲率は $K \leq 0$ とする。基本群は既約とする。M' を体積有限なランクが２以上の局所対称空間とする。二つの多様体の体積は等しいとし、基本群は同型とする。このとき、二つは等長。

Proof. 定理 2.2 より、$\mathrm{HQH}(\pi_1(M')) = 0$. よって、$\mathrm{HQH}(\pi_1(M)) = 0$. ここで定理 3.2 を使うと、$M$ は局所対称空間。二つの局所対称空間 M, M' の基本群が同型だから、モストウ剛性より（ここで二つの体積が等しいことを使う）、二つは等長。 □

References

[1] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Seminar, 25. Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.

[2] W.Ballmann,M.Gromov,V.Schroeder, *Manifolds of non-positive curvature*. Progress in Mathematics, 61. Birkhauser. 1985.

[3] C. Bavard, Longueur stable des commutateurs, L'Enseign. Math. 37 (1991), 109–150

[4] M. Bestvina, K. Fujiwara, Bounded cohomology of subgroups of mapping class groups, Geom. Topol. 6 (2002), 69–89

[5] M. Bestvina, K. Fujiwara, Quasi-homomorphisms on mapping class groups, Glasnik Matematicki, Vol. 42, No.1 (2007), 213-236.

[6] M. Bestvina, K. Fujiwara, A characterization of higher rank symmetric spaces via bounded cohomology, eprint 2007, math.GR/0702274.

[7] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature*, Grund. der Math. Wiss. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999

[8] R. Brooks, Some remarks on bounded cohomology, In *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, 53–63, Princeton, N.J., 1981. Princeton Univ. Press.

[9] M. Burger, N. Monod, Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 1(2), (1999) 199–235.

[10] M.Burger, N.Monod, Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory, Geom. Funct. Anal. 12, no. 2, (2002) 219–280.

[11] D.B.A. Epstein, K. Fujiwara, The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups, Topology, 36(6), (1997), 1275–1289.

[12] K. Fujiwara, The second bounded cohomology of a group acting on a Gromov-hyperbolic space, Proc. London Math. Soc. (3), 76(1), (1998), 70–94.

[13] K. Fujiwara, The second bounded cohomology of an amalgamated free product of groups, Trans. Amer. Math. Soc., 352(3), (2000), 1113–1129.

[14] M. Gromov, Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, 75–263. Springer, New York, 1987.

[15] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (56), (1983), 5–99. 1982.

[16] N.V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[17] N. Monod, *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, Lecture Notes in Mathematics, 1758. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

東北大学　情報科学研究科

E-mail address: fujiwara@math.is.tohoku.ac.jp