仙台数学セミナー　「アルキメデスの話」 2004.8.20.

藤原耕二 (東北大・数学). fujiwara@math.tohoku.ac.jp

1. アルキメデスとその時代

学問としての数学はギリシャに始まると言われる。それ以前にも、エジプトやバビロニアで数学的な知識や手法は様々な実用的な問題の解決に使われていた。「学問としての」数学とは、何かを定義し、論証を積み上げることにより、何かを証明するという形式を意味している。論証の途中の主張は「命題」と呼ばれ、最終的な重要な主張は「定理」と呼ばれた。そのような形式を徹底して書かれた本として、ユークリッドの「原論」が有名である。

今回は、ギリシャ最高の数学者、多分、数学史上最高の数学者の一人、アルキメデスの考えたことについて話す。簡単に時代背景を説明すると、アルキメデスはシシリアで 287? BC(紀元前）に生まれ、212 BC に亡くなった。彼はアレキサンドリアで、ユークリッド (325? - 265? BC) の下、勉強した。

ユークリッドは、アテネでプラトン (427-347 BC) が始めた大学（アカデミーと呼ばれる）で教育されたと言われてる。ユークリッドの数学に対する態度、すなわち定義、証明、定理というような様式は、プラトンの影響らしい。よく知られているように、プラトンの先生はソクラテス (469-399 BC) であるが、プラトンはピタゴラス (569-475 BC) の仕事も勉強していた。プラトンの大学は 529AD(紀元後) まで、およそ 900 年続いた。

アルキメデスは、風呂に入っていて浮力を発見し（アルキメデスの原理と呼ばれる)、「ユーリカ！」と叫んで裸で走り回った人として知られている。アルキメデスは物理学、工学に大変才能があった人で、彼の数学の仕事にもそのような影響は見られる。しかし、彼を 2000 年以上たった今でも輝かせて見せるのは、その幾何学における際だった才能だと思う。私もそれが一番好きなので、それについて話したい。

アルキメデスの仕事の一部は、直接翻訳で読むことが出来る。それが、今でも理解可能な形式で書かれていることは驚くべきことなのかも知れない。次にあげる本は、（大学の始めの）微積分についての本だが、高校生にも拾い読みすることが出来ると思う。アルキメデスの放物線についての仕事の説明がある。

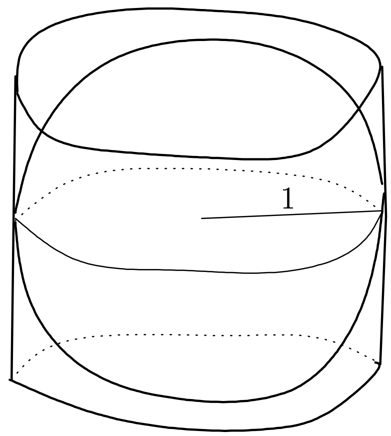
「解析入門、パート 1」A.J. ハーン著. シュプリンガー東京. 2400 円.

次の本はアルキメデスとは関係ないが、面積と体積について、ドイツ人数学者デーン (1878-1952) の仕事を中心に解説していて面白い。

「分割の幾何学」. 砂田利一著. 日本評論社. 2500 円.

2. 球と円柱

球に外接する円柱を考える。球の半径を 1 とすれば、円柱の底面の円の半径も 1 である。円柱には底面と上面があるとし、それらも球に外接しているとする。つまり、円柱の高さは 2 である。



この球の表面積を K とし、円柱の表面積を H とする。ただし、円柱の表面積として、側面だけでなく、底面と上面の面積も加える。

アルキメデスは次を証明した。

$$K = \frac{2}{3}H.$$

公式を知っていれば面積 K, H を計算することが出来る。まず、球面の面積の公式から $K = 4\pi$. 次に円柱については、側面は長方形で、横が 2π、高さが 2 だから、面積は 4π. 底面と上面はそれぞれ、半径 1 の円だから、面積はそれぞれ、π. それらを足して $H = 4\pi + \pi + \pi = 6\pi$. したがって、確かに $K = \frac{2}{3}H$ となる。

アルキメデスは、このような公式を使わないで考えた。ところで、底面積が S、高さが T の三角錐の体積は $ST/3$ である。皆さんは、この公式がなぜ正しいか考えた事がありますか？　時間があれば考えてみてください。

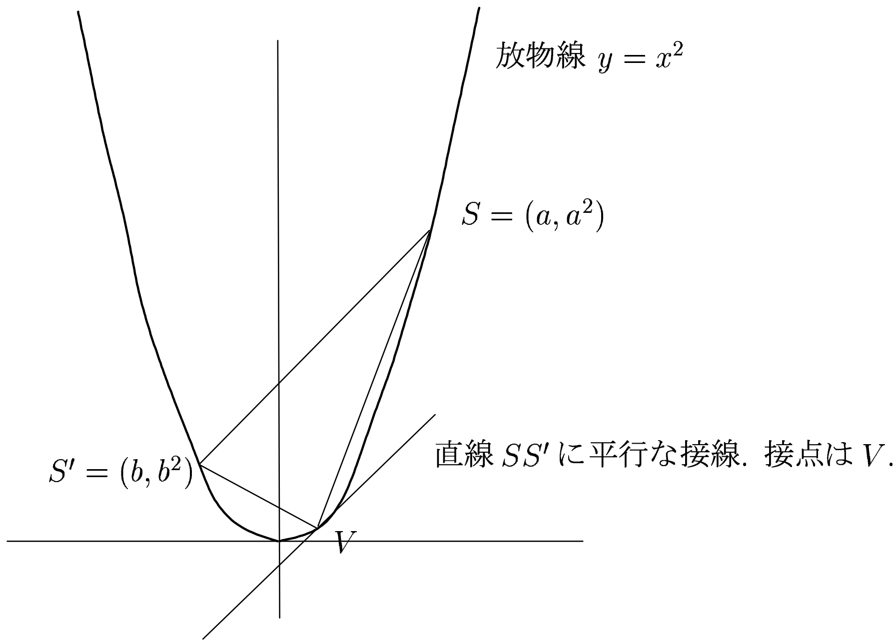
3. 放物線

放物線 $y = x^2$ の上に 2 点 $S = (a, a^2), S' = (b, b^2)$ を取る。放物線上の点で、接線が直線 SS' と平行になる点を V とする。

三角形 $\Delta(S, S', V)$ の面積を A とする。放物線と直線 SS' で囲まれた部分の面積を B とする。

アルキメデスは次を示した。

$$B = \frac{4}{3}A.$$



次の問題を考えてみてください。計算方法をまだ習っていなければ、解答を得られなくても構いません。

問 1. 2 点 S, S' を通る直線の方程式を求めよ。

問 2. 頂点 V の座標を計算せよ。

問 3. V における放物線の接線の方程式を求めよ。

問 4. 三角形 $\Delta(S, S', V)$ の面積 A を計算せよ。

問 5. 放物線と直線 SS' で囲まれた部分の面積 B を計算せよ。

問 6. $B = \frac{4}{3}A$ を確かめよ。

4. 無限級数 – 無限個の和

一辺の長さ 1 の正方形を下のように 4 等分して、そのうちの三つからなる図形を A_1 とします。その面積を a_1 とすれば、$a_1 = 3/4$ です。4 等分の残りの 1 つは、一辺の長さが 1/2 の正方形です。それを、前と同じように 4 等分して、そのうちの三つからなる図形を A_2 とし、その面積を a_2 とすれば $a_2 = 3/4^2$ です。図形 A_1 と A_2 は相似で、その比は 2 : 1 なので、面積の比は 4 : 1 になっています。数列 a_i は等比数列になっています。幾何数列と言うこともあります。

この操作を続け、図形 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$ を得ます。それらの面積を $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ とします。

問 1. a_5 を計算してみよ。

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ と定義します。このような数列の和を級数といいます。これを

$$S_n = \Sigma_{i=1}^n a_i$$

と書くことがあります。Σ は総和の記号です。S_n は、はじめの n 個の図形を合わせた図形の面積です。

問 2. S_5 を計算せよ。S_n を計算せよ。

では、すべての a_i を足したら、何になるでしょう？　考えてみてください。

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

もし「極限」という言葉を習ったことがあれば、

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

を求めて下さい。すべての a_i の和（無限級数と呼ばれます）を、仮に S と書くことにします。S が 1 より大きくないことは、図から分かりますか？では、S は 1 より小さいですか？