Surveys in Geometry

無限群と幾何学 (95 年 11 月)

「双曲群の手引き」

藤原耕二 (慶応大学)

現在の所属：東北大学. fujiwara@math.tohoku.ac.jp

目 次

まえがき

20 世紀はじめ、Dehn は幾何学的アイディアを使って、曲面群の語の問題を解決した。これが、今でいう幾何学的群論の始まりである。その後、離散群の組み合せ論的研究の中で、幾何学的考察はなかば忘れられていた。それに再び注目したのは Rips である。それは、Gromov の双曲群の理論として結実した。[Gr]. それから約 10 年、幾何学的群論は双曲群を中心に発展したが、今後は新しい展開も期待される。その意味で、双曲群の理論は幾何学的群論における最初の一歩といえる。

このノートでは、一章で空間の双曲性、二章で群の双曲性を定義する。そのあと、双曲群について最初の二つの重要な定理、すなわち、三章で初等的でない双曲群が階数 2 の自由群を含むこと、四章で双曲群が線型の等周不等式をみたすことをしめす。他を参照しないで読めるように心掛けたが、双曲群にパラボリックな元が存在しないこと（定理 2.1）の証明を省いたのは、心残りである。

追記

このノートは 1995 年 11 月に東工大に於いて行なわれた Surveys in Geometry 「無限群と幾何学」における講演「双曲群の手引」の予稿である。

その後, 名古屋大学多元数理研究科における集中講義（2002 年 1 月）「幾何学的群論の入門」で双曲群についても話すにあたり, 少し手を加えた（主に定理 4.2 の証明）。

北大数学教室での集中講義（2002 年 10 月）で話した後, 手を加えた（例 1.2, 定理 1.1 の証明, 5 章など）。

1 双曲的な空間

1.1 双曲性

定義 1.1 (X,d) を完備距離空間とする。連結な $I \subset \mathbb{R}$ から X への連続写像 $f : I \to X$ を**道**とよぶ。このノートでは、すべての道は、道に沿った長さでパラメタライズされているとする。f がすべての $t, s \in I$ について

$$|t-s| = d(f(t), f(s))$$

をみたすとき、f またはその像を**測地線**という。すべての $x, y \in X$ に対し、x と y を結ぶ測地線が存在する時、X を**測地空間** (*geodesic space*) という。

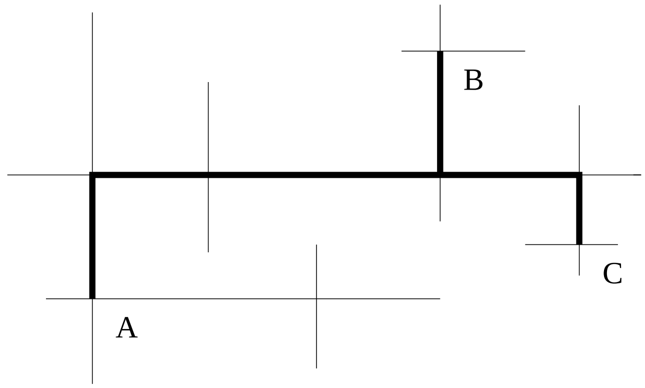

図 1: ツリーの測地三角形

以下 (X, d) は測地空間とする。

定義 1.2 $\triangle$ を X の測地三角形とする。すなわち、$\triangle$ の三辺α、β、γが測地線とする。ある$\delta \geq 0$ が存在して

$$\alpha \subset N_\delta(\beta \cup \gamma), \beta \subset N_\delta(\gamma \cup \alpha), \gamma \subset N_\delta(\alpha \cup \beta)$$

をみたすとき $\triangle$ を$\delta-$**slim** な三角形（文献によっては$\delta - thin$ とも言う）という。ただし、N_δ は $\delta-$近傍を表す。

定義 1.3 ある $\delta \geq 0$ が存在して、X のすべての測地三角形がδ - slim なとき、X を $\delta-$ **双曲的** $(\delta - hyperbolic)$ という。ある $\delta \geq 0$ に対し δ-双曲的なとき、$(Gromov$ の意味で$)$ **双曲的** $(Gromov - hyperbolic)$ という。

例 1.1 ツリー（単連結なグラフのこと）は、各辺の長さを *1* とすることで測地空間になるが、これは（0–）双曲的である（図 1）。

例 1.2 M を完備、単連結な負の定曲率多様体とすると M は双曲的である。とくに、断面曲率 $= -1$ のときは、双曲空間と呼ばれ $\mathbb{H}^n$ と表される。この例が、Gromov 双曲性の名前の由来である。一般に上の例で「負の定曲率」の部分をある $c > 0$ が存在して、断面曲率 $\leq -c < 0$ としても M は双曲的である。実際、CAT$(-c)$ 空間は双曲的である（図 2）.

双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の時は簡単なので証明しよう。Δを測地三角形とする。*3* つの角を a, b, c とすれば、ガウス・ボンネより、$\pi - a - b - c = \int K dv$. ここで、$K$ は断面曲率で, 今は $K = -1$, dv は面積要素. 従ってΔの面積は π 未満. よってΔの内接円の半径 r について $r < 1$（ユークリッド平面ならこれは正しく, 双曲平面では同一半径の円の面積は, ユークリッド平面でより大きくなるのでよい)。これより、Δ は 2-slim である。

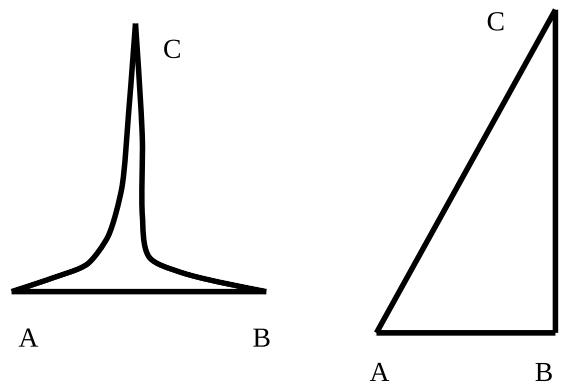

図 2: $\mathbb{H}^n$ と $\mathbb{R}^n$ の測地三角形。 $n \geq 2$.

例 1.3 次元が *2* 以上の Euclid 空間は双曲的でない（図 2）。次元が *1* の場合は、例 *1.1* より双曲的。

1.2 擬測地線

次は明らかである（双曲性の定義で, 二角形も三角形の特別な場合と考える）.

命題 1.1 X を $\delta-$双曲空間とする。測地線α、βが同じ始点と同じ終点を持てば次が成り立つ。

$$\alpha \subset N_\delta(\beta), \beta \subset N_\delta(\alpha).$$

記法 1.1 X の *2* 点 A、B に対し、A から B への任意の測地線を $[A,B]$ とかく。

命題 1.2 X を $\delta-$ 双曲空間とする。A、B、C を X の点とする。この時、測地線 $[B,C]$、$[A,C]$、$[A,B]$ 上にそれぞれ点 A'、B'、C' が存在し次を満たす。

$$d(A',B'), d(B',C'), d(C',A') \leq 4\delta.$$

証明 $A' \in [B,C]$、$B' \in [A,C]$、$C' \in [A,B]$ を次を満たす 3 点とする。

$$d(B,C') = d(B,A'),\ d(A,C') = d(A,B'),\ d(C,A') = d(C,B').$$

これが求める A'、B'、C'であることを示す。$[B,C]$、$[A,C]$、$[A,B]$ はδ-slim な三角形を作るから $[A,C]$ 又は $[B,C]$ 上の点 P で $d(C',P) \leq \delta$となるものがある。$P \in [A,C]$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、

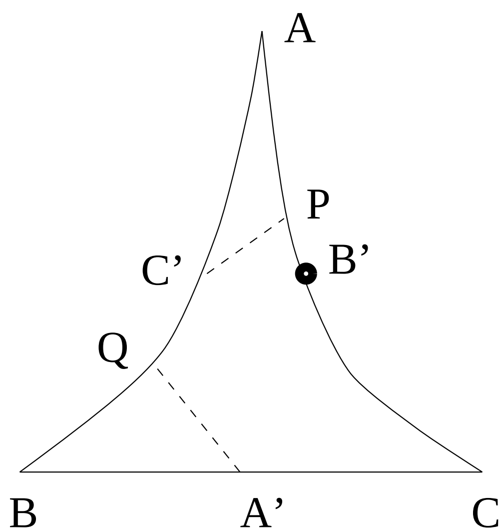

図 3: $d(A', Q), d(Q, C'), d(C', P), d(P, B') \leq \delta$

$d(P, B') \leq \delta$ である。なぜなら、もしちがうと $d(A, C') < d(A, B')$ となるからである。よって $d(B', C') \leq 2\delta$. 又、一般性を失うことなく $Q \in [A, B]$ が存在して $d(A', Q) \leq \delta$、$d(Q, C') \leq \delta$としてよい。よって $d(A', C') \leq 2\delta$. よって $d(A', B') \leq 4\delta$. 図３。 ∎

補題 1.1 γをδ- 双曲空間 X の測地線とする。$l \geq 6\delta$とする。$P, Q \in X \setminus N_l(\gamma)$ に対し $P', Q' \in \gamma$を

$$\begin{aligned} d(P, P') &= d(P, \gamma) \\ d(Q, Q') &= d(Q, \gamma) \end{aligned}$$

をみたす点とする。もし、$d(P, Q) < l - 4\delta$ なら $d(P', Q') \leq 8\delta$。

証明　まず$\delta > 0$ を仮定。$S \in [Q, Q']$ を $d(S, Q') = 2\delta$となる点とする。三角形 (Q, P', Q') はδ -slim だから、$T \in [Q, P'] \cup [P', Q']$ が存在して $d(S, T) \leq \delta$をみたす。このとき実は $T \in [Q, P']$ である。なぜなら、矛盾を導くために $T \in [P', Q']$ としてみる。このとき $[P', Q'] \subset \gamma$ と仮定してよい。すると、

$$d(Q, \gamma) \leq d(Q, T) \leq d(Q, S) + d(S, T) < d(Q, S) + d(S, Q') = d(Q, Q').$$

これは Q'のとり方に矛盾。よって $T \in [Q, P']$。さて、三角形 PQP' はδ -slim だから、$U \in [P', P] \cup [P, Q]$ が存在して $d(T, U) \leq \delta$である。この

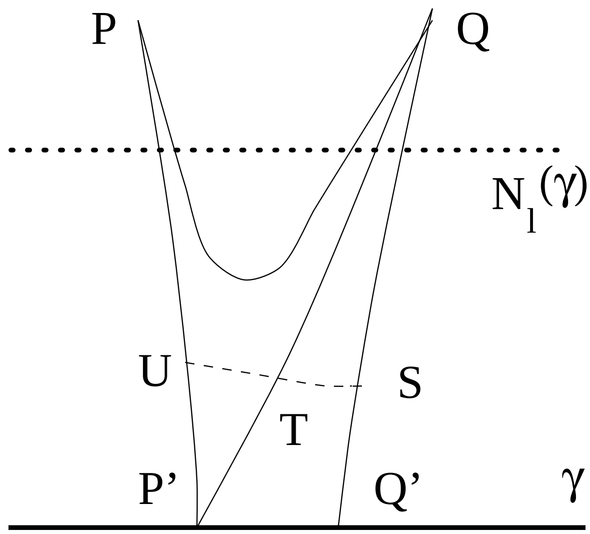

図 4: $d(U,T), d(T,S) \leq \delta, d(S,Q') = 2\delta$. 測地線 γ への射影は、距離を著しく縮める。

とき実は $U \in [P,P']$ である。なぜなら、もし $U \in [P,Q]$ なら、

$$\begin{aligned} d(Q',Q) &\leq d(Q',S) + d(S,T) + d(T,U) + d(U,Q) \\ &\leq 2\delta + \delta + \delta + d(P,Q) \\ &< l. \end{aligned}$$

これは矛盾、よって $U \in [P,P']$。更に、$d(P',U) \leq d(Q',U)$ である。なぜなら、もし $d(P',U) > d(U,Q')$ なら $d(P,P') > d(P,Q')$ となり P'のとり方に矛盾するから。よって

$$\begin{aligned} d(P',Q') &\leq d(P',U) + d(Q',U) \\ &\leq 2d(U,Q') \\ &\leq 8\delta. \end{aligned}$$

図 4 を見よ。

さて$\delta = 0$ の場合であるが、$\lim_i \delta_i = 0$ となる正の数列 $\{\delta_i\}_i$をとって、上の議論を適用すればよい。 ∎

定義 1.4 αを道とする。ある定数 $K \geq 1$、$\varepsilon \geq 0$ が存在して

$$|t-s| \leq K d(\alpha(t), \alpha(s)) + \varepsilon$$

がすべての t、s について成りたつとき、αを $(K,\varepsilon)-$**擬測地線** ($(K,\varepsilon)-quasi-geodesic$) という。

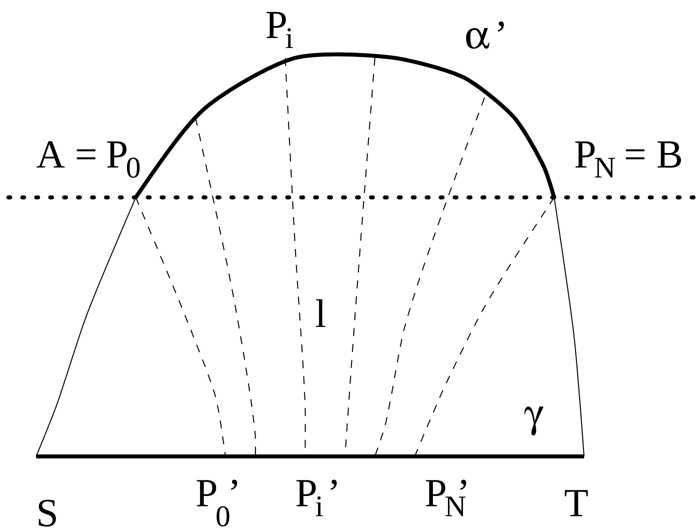

図 5: 測地線 γ の近傍から出た擬測地線 α' は、ほどなく戻ってくる

命題 1.3 X を$\delta-$双曲空間とし、αを $(K, \varepsilon)-$擬測地線とする。δ、K、εだけによる定数$C(\delta, K, \varepsilon) \geq 0$が存在して次が成り立つ（実際$C = 6(10K\delta + 30K^2\delta + \varepsilon)$ とすればよい）。αと同じ始点、同じ終点をもつ測地線γが存在して次をみたす。

$$\alpha \subset N_C(\gamma), \gamma \subset N_C(\alpha).$$

ただしここではαの始点と終点は X の点と仮定する。

証明 $\delta > 0$ と仮定してよい。αの始点を $S \in X$、終点を $T \in X$ とし、$\gamma = [S, T]$ とする。$l = 30K\delta$とし $N_l(\gamma)$ を考える。$\alpha \cap (X \setminus N_l(\gamma))$ の任意の連結成分をα'と書く。もし、こんなα'がなければ、$l = 30K\delta$とし証明が終わっていることに注意。α'の始点を A、終点を B とする。さて、α'を点

$$A = P_0 = \alpha(t_0), P_1 = \alpha(t_1), \cdots, P_i = \alpha(t_i), \cdots, P_N = \alpha(t_N) = B$$

で次を満たすように分割する。図５。

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N$$
$$\frac{l}{2} - 2\delta \leq |t_i - t_{i-1}| < l - 4\delta.$$

ここで $l = 30K\delta \geq 30\delta$に注意。$P'_i \in \gamma$を P_iとγの距離を実現する点とする。$d(P_i, P_{i-1}) \leq |t_i - t_{i-1}| < l - 4\delta$だから、補題 1.1 より $d(P'_i, P'_{i-1}) \leq 8\delta.$

よって

$$
\begin{aligned}
d(P_0, P_N) &\leq d(P_0, P'_0) + \sum_{i=1}^{N} d(P'_i, P'_{i-1}) + d(P'_N, P_N) \\
&\leq 2l + 8N\delta.
\end{aligned}
$$

また、α'は $(K, \varepsilon)-$擬測地線だから

$$|t_N - t_0| \leq K d(P_0, P_N) + \varepsilon.$$

又、

$$\left(\frac{l}{2} - 2\delta\right) N \leq |t_N - t_0|$$

より

$$\left(\frac{l}{2} - 2\delta\right) N \leq K(2l + 8N\delta) + \varepsilon.$$

従って

$$N\left(\frac{l}{2} - 2\delta - 8K\delta\right) \leq 2Kl + \varepsilon.$$

一方、$l = 30K\delta$だから

$$\frac{l}{2} - 2\delta - 8K\delta \geq 5K\delta > 0.$$

よって

$$N \leq \frac{60K^2\delta + \varepsilon}{5K\delta}.$$

以上より

$$
\begin{aligned}
|\alpha'| &\leq (l - 4\delta)N \\
&\leq lN \\
&\leq 6(60K^2\delta + \varepsilon).
\end{aligned}
$$

よって $C_1 = l + \frac{6(60K^2\delta+\varepsilon)}{2} = 30K\delta + 3(30K^2\delta + \varepsilon)$ とすれば、$\alpha \subset N_{C_1}(\gamma)$。実は$\gamma \subset N_{2C_1}(\alpha)$ である。これを背理法で示すためにある $x \in \gamma$に対し、$x \notin N_{2C_1}(\alpha)$ としてみる。すなわち$\alpha \cap N_{2C_1}(x) = \phi$. ところで、$\gamma$は測地線だから S と T は $N_{C_1}(\gamma) \setminus N_{2C_1}(x)$ の異なる連結成分に含まれる。これは$\alpha \subset N_{C_1}(\gamma) \setminus N_{2C_1}(x)$ に矛盾。よって$\gamma \subset N_{2C_1}(\alpha)$. 以上より $C = 2C_1$ とすればよい。 ∎

注意 1.1 この命題は $\mathbb{R}^2$で成り立たない。例えば $(0, 0)$ と (N, N) を結ぶ道αを $(0, N)$ を経由する最短線（*2*つの直線の和）とすると、αは $(2, 0)-$

擬測地線であるが、$(0,0)$ と (N,N) を結ぶ測地線γについて $d(\alpha,\gamma)=\frac{N}{\sqrt{2}}$ である。

この命題で述べられている現象は"*quasi-geodesic stability*" と呼ばれることがある。この現象は, 双曲空間において、「局所的に *quasi-geodesic* な道が、全体として *quasi-geodesic* になっている」という重要な帰結を持ち, これは、「双曲群」(２章) が「オートマチック群」であることの理由の一つである。実際, 次が正しい (これは、ユークリッド平面では成立しない).

X を δ-*hyperbolic* とする。任意の定数 $K \geq 1, \varepsilon \geq 0$ に対して, ある定数 $l(\delta,K,\varepsilon)>0, K'(\delta,K,\varepsilon)\geq 1, \varepsilon'(\delta,K,\varepsilon)\geq 0$ が存在して次を満たす: 道γについて、その任意の連結部分で, 長さが少なくとも l あるものが、(K,ε)-*quasi-geodesic* なら、γ は (K',ε')-*quasi-geodesic.*

系 1.1 X を δ-*hyperbolic* とする。任意の定数 $K\geq 1, \epsilon \geq 0$ に対して, ある定数 $D(K,\epsilon,\delta)$ が存在して次を満たす : X の三角形 Δの各辺が (K,ϵ) -*quasi-geomdesic* ならΔ は D-*slim.*

(証明) Δの頂点を A,B,C とする。前の命題より、Δ の各辺は対応する測地線 $[A,B],[B,C],[C,A]$ と, お互いに $C(K,\epsilon,\delta)$-近傍にある。一方, 測地三角形 $([A,B],[B,C],[C,A])$ は δ-slim より、Δは $(\delta+2C)$-slim である. ∎

1.3 擬等長写像

定義 1.5 (X,d)、(X',d') を距離空間とする。写像

$$f : X \to X'$$
$$f' : X' \to X$$

とある定数 K、ε、$D \geq 0$ が存在して、次をみたすとき、f と f'は**擬等長写像** $(quasi-isometry)$、X と X'は**擬等長的** $(quasi-isometric)$ という。記号を簡単にするために、距離 $d(x,y)$ を $|x-y|$ などと書く.

すべての $x,y\in X$ と $x',y'\in X'$に対して

$$\begin{aligned}|x-y| &\leq K|f(x)-f(y)|+\varepsilon\\ |f'\circ f(x)-x| &\leq D\\ |x'-y'| &\leq K|f'(x')-f'(y')|+\varepsilon\\ |f\circ f'(x')-x'| &\leq D\end{aligned}$$

注意 1.2 上で、f と f'は連続とは仮定しない。

例 1.4 $\mathbb{R}^2$の中の整数の組よりなる格子点集合を $\mathbb{Z}^2$とかき、$\mathbb{Z}^2$に $\mathbb{R}^2$から誘導される距離を考えると、$\mathbb{R}^2$と $\mathbb{Z}^2$は擬等長的である。

定理 1.1 (X, d) と (X', d') を、擬等長的な測地空間とする。X'が双曲的なら X も双曲的である。

証明 定義 1.5 の記号をそのまま使う。$\gamma(t)$ を X の道とする。（無限でも有限でもよい)。一般に f は連続でないから, $f(\gamma)$ は道ではない（またパラメータ t も弧長にはならない)。よって、離散化し, $f(\gamma)$ を近似する道 $\gamma' : \mathbb{R} \to X'$ を次のように定義. まず、$n \in \mathbb{Z}, \gamma'(n) = f(\gamma(n))$ とし、それらの点を一定速度の測地線で結ぶ.

$$\gamma' = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[f(\gamma(n)), f(\gamma(n+1))].$$

このとき、

$$f(\gamma) \subset N_{K+\epsilon}(\gamma'), \gamma' \subset N_{K+\epsilon}(f(\gamma)).$$

$K' = K(K+\epsilon), \epsilon' = 2K + 3\epsilon$とする. このとき、$\gamma'$は (K', ϵ')-quasi-geodesic である。実際, 任意の $t, s \in \mathbb{Z}$ について、

$$|t - s| = |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq K|f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))| + \epsilon = K|\gamma'(t) - \gamma'(s)| + \epsilon.$$

γ' の 弧長パラメータτを, パラメータ t の関数$\tau(t)$ と考えると, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$|\gamma'(n) - \gamma'(n+1)| \leq K + \epsilon$$

より, 任意の $t, s \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$|\tau(t) - \tau(s)| \leq (K+\epsilon)|t - s|.$$

ここで, $\tau(t) = \tau, \tau(s) = \sigma$ と置き, 得られている不等式に代入すると、任意の$\tau = t(n), \sigma = t(m), (n, m \in \mathbb{Z})$ について、

$$|\tau - \sigma|/(K+\epsilon) \leq |t - s| \leq K|\gamma'(\tau) - \gamma'(\sigma)| + \epsilon.$$

よって、

$$|\tau - \sigma| \leq K(K+\epsilon)|\gamma'(\tau) - \gamma'(\sigma)| + \epsilon.$$

道γ'の定義の仕方より、一般の τ, σ については次が成立.

$$|\tau - \sigma| \leq K(K+\epsilon)|\gamma'(\tau) - \gamma'(\sigma)| + \epsilon + 2(K+\epsilon).$$

上の議論で、γに端点があるとき、γと γ' の端点を共通にとることができることに注意.

さて、これを使って定理の証明をする。X'の双曲定数を$\delta' \geq 0$とする。ある$\delta \geq 0$が存在して X のすべての測地三角形がδ-slim であることを示せばよい。まず、上の結果より、X の任意の測地三角形$\Delta = (\alpha, \beta, \gamma)$ に対して, 対応する X'の三角形 $\Delta' = (\alpha', \beta', \gamma')$ は (K', ϵ')-quasi-geodesic 三角形である。ところが X' はδ'-hyperbolic なので、系 1.1 よりΔ'は $C = D(K', \epsilon', \delta')$-slim である。よって、その $(K+\epsilon)$-近傍にある「三角形」$f(\Delta)$ は $(C + 2(K + \epsilon))$-slim である。従って,「三角形」$f'f(\Delta)$ は $(K(C + 2(K + \epsilon)) + \epsilon)$-slim. よって、その D-近傍にある三角形 $\Delta = (\alpha, \beta, \gamma)$ は $\delta = (K(C + 2(K + \epsilon)) + \epsilon + 2D)$-slim である. ∎

1.4 擬凸部分空間

定義 1.6 (X, d) を測地空間とする。X の部分集合 S に対して、$C \geq 0$ が存在して、任意の $x, y \in S$ と x と y を結ぶすべての測地線γに対して

$$\gamma \subset N_C(S)$$

が成り立つとき、S は**擬凸** $(quasi-convex)$ であるという。

例 1.5 リーマン多様体の全測地的な部分多様体は擬凸である。

例 1.6 $\mathbb{R}^2$ 中、$xy = 0$ で定義される図形は擬凸でない。

測地空間 (X, d) の弧状連結な部分集合 S には自然に（擬）測地距離 d' が定義される。

定理 1.2 測地空間 (X, d) の弧状連結な部分集合 S 上の（擬）測地距離を d'とする。もし (X, d) が双曲的で S が擬凸なら、(S, d') も双曲的である。

証明 定義に従って確かめればよい。(S, d') の（擬）測地三角形 $\triangle$ に対し、S の擬凸定数の範囲で近似するような (X, d) の測地三角形 $\triangle'$をとると、$\triangle'$は slim だから、$\triangle$ も slim だと結論できる。詳細略。 ∎

注意 1.3 群と部分群への応用が重要。

1.5 双曲空間の境界

この章の目的は双曲空間 X の境界∂X を定義し、そこに位相を入れることである。方法は [Gr] による。詳細は [Sh] による。

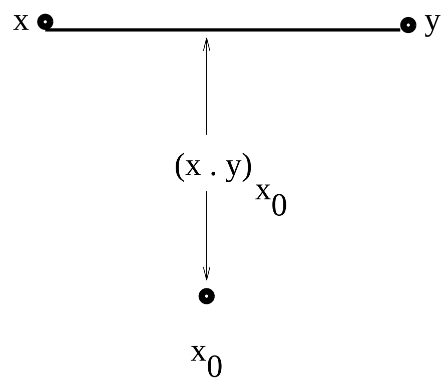

図 6: 双曲空間での Gromov 積の意味

(X, d) を距離空間とし、$x_0 \in X$ を基点とする。$x, y \in X$ に対して

$$(x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2}\{d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)\}$$

と定義し、x と y の **Gromov 積** (*Gromov product*) とよぶ。図６。

定義 1.7 点列 $\{a_i\} \subset X$ が

$$\lim_{i,j\to\infty}(a_i \cdot a_j) = \infty$$

をみたすとき、**無限遠に収束する** (*converge to infinity*) という。

注意 1.4 $|(x \cdot y)_{x_0} - (x \cdot y)_{x_1}| \leq d(x_0, x_1)$ だから、この定義は基点のとり方によらない。

注意 1.5 $(x \cdot y)_{x_0} \leq \min\{d(x, x_0), d(y, x_0)\}$ だから $\{a_i\}$ が無限遠に収束すれば $\lim_{i\to\infty} d(x_0, a_i) = \infty$

定義 1.8 $S_\infty(X) = \{$ 無限遠に収束する点列 $\{a_i\}\}$ とし、そこに関係 R を次のように定める。

$$\{a_i\}R\{b_i\} \Longleftrightarrow \lim_{i\to\infty}(a_i \cdot b_i) = \infty$$

注意 1.6 関係 R は基点によらない。

注意 1.7 $\{a_i\}R\{a_i\}$ は明らか。

注意 1.8 $\{a_i\}R\{b_i\} \Longrightarrow \{b_i\}R\{a_i\}$

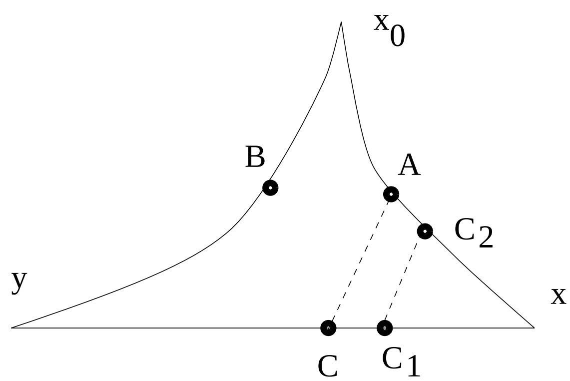

図 7: 命題 1.4 のための図

注意 1.9 Rは必ずしも推移的でない。例えば $X = \Gamma(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}; x^{\pm 1}, y^{\pm 1})$ とする。$x_0 = 1$とし、$a_n = x^n, b_n = y^n, c_n = x^n y^n$とすれば、$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in S_\infty(X)$. $(a_n \cdot b_n) = n, (b_n, c_n) = n, (a_n, b_n) = 0$. よって $\{a_n\}R\{b_n\}$ かつ $\{c_n\}R\{b_n\}$ だが $\{a_n\}R\{b_n\}$ ではない。

さて目標は X が双曲的なら関係 R は推移的であることを示すことである。

命題 1.4 X が$\delta-$双曲的なら、すべての $x, y, z \in X$ に対して

$$(x \cdot y) \geq \min\{(x \cdot z), (y \cdot z)\} - 27\delta.$$

証明 X は$\delta-$双曲的とする。図 7 。$x, y \in X$ にたいしてδ - slim な三角形 x_0, x, y を考える。命題 1.2 より $A \in [x, y], B \in [x_0, y], C \in [x, y]$ が存在して

$$d(A, B), d(A, C), d(B, C) \leq 4\delta.$$

まず $d(x_0, [x, y]) \geq d(x_0, C) - 10\delta$ を示す。x_0と $[x, y]$ の距離を実現する点を $C_1 \in [x, y]$ とする。すなわち

$$d(x_0, [x, y]) = d(x_0, C_1).$$

一般性を失うことなく、$C_1 \in [C, x]$ としてよい。三角形 xAC はδ - slim だから、$C_2 \in [A, x] \cup [A, C]$ が存在して、 $d(C_1, C_2) \leq \delta$ をみたす。このとき $d(C_2, A) \leq 5\delta$が成り立つ。なぜなら、もし $C_2 \in [A, C]$ なら明らか。よって $C_2 \in [A, x]$ とする。$d(C_2, A) > 5\delta$として矛盾を導く。 まず、次に注意。

$$d(x_0, C_1) \geq d(x_0, C_2) - \delta > d(x_0, A) + 4\delta.$$

ところが $d(x_0,C) \le d(x_0,A)+4\delta$ だから、

$$d(x_0,C_1) > d(x_0,C).$$

これは、矛盾。よって、$d(C_2,A) \le 5\delta$がわかった。従って $d(C,C_1) \le 10\delta.$
よって

$$d(x_0,[x,y]) \ge d(x_0,C) - 10\delta.$$

次も容易にわかる。

$$|(x\cdot y) - d(x_0,C)| \le 8\delta.$$

上の２式から、

$$d(x_0,[x,y]) \ge (x\cdot y) - 18\delta.$$

さて $z \in X$ とする。三角形 xyz はδ- slim だから、

$$d(x_0,C) \ge \min\{d(x_0,[x,z]), d(x_0,[y,z])\} - \delta$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
(x\cdot y) &\ge d(x_0,C) - 8\delta \\
&\ge \min\{d(x_0,[x,z]), d(x_0,[y,z])\} - 9\delta \\
&\ge \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\} - 27\delta
\end{aligned}$$

∎

ここでは証明はしないが実は逆も正しい。すなわち、

命題 1.5 ある$\delta \ge 0$ が存在してすべての $x,y,z \in X$ に対して $(x\cdot y) \ge \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\} - \delta$ なら、X は双曲的。

命題 1.4 と 1.5 より

定理 1.3 X は双曲的 $\Longleftrightarrow$ ある$\delta \ge 0$ が存在して、すべての $x,y,z,\in X$ に対して $(x\cdot y) \ge \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\} - \delta$

命題 1.6 X が双曲的なら R は推移的である。

証明　命題 1.4 より$\delta \ge 0$ が存在して

$$(x\cdot y) \ge \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\} - \delta$$

である。$\{a_i\},\{b_i\},\{c_i\} \in S_\infty(X)$ に対して $\{a_i\}R\{b_i\}$ かつ $\{b_i\}R\{c_i\}$ なら

$$(a_i\cdot c_i) \ge \min\{(a_i\cdot b_i),(b_i\cdot c_i)\} - \delta$$

であるから、$\{a_i\}R\{c_i\}$ を得る。 ∎

定義 1.9 X を双曲空間とする。$S_\infty(X)$ の同値関係 R を使って X の**境界**(*boundary*)∂X を

$$\partial X = S_\infty(X)/R$$

と定義する。$\{a_i\} \in S_\infty(X)$ の属する同値類 $x \in \partial X$ に対し、

$$\lim_{i\to\infty} a_i = x$$

とかく。$\overline{X} = X \cup \partial X$ とかく。

注意 1.10 X の点 x を任意に固定する。x を基点とする無限測地線α の定める *asymptotic class* を $[\alpha]$ と書く。それら全体のなす集合 $\{[\alpha]\}$ に適当な位相を入れることにより X の境界の同値な定義を得ることができる。これは基点 x に依存しない。実際、無限遠に収束する点列 $\{a_i\}$ は自然にある $[\alpha]$ を定める。ここでαは x を基点とするある測地線である。

例 1.7 $\partial\mathbb{H}^n = S^{n-1}$である。

Gromov 積を$\overline{X}$に次のように拡張する。

定義 1.10 $x, y \in \overline{X}$ に対し

$$(x \cdot y)_S = \inf\{\liminf_{i\to\infty}(x_i \cdot y_i)\}.$$

ただし、infは $\lim_i x_i = x, \lim_i y_i = y$ をみたすすべての $\{x_i\}, \{y_i\}$ に関するもの。もし、$x \in X$ なら $\lim_i x_i = x$ は X の距離に関する収束。

命題 1.7 *1.* $x, y \in X$ なら $(x \cdot y)_S = (x \cdot y)$
2. $x, y, z \in \overline{X}$に対して $(x \cdot y)_S \geq \min\{(x \cdot z)_S, (z \cdot y)_S\} - 27\delta$

証明

1. $(\quad\cdot\quad) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ は X の距離について連続だから明らか。
2. 概略。まず次が示せる。$\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}$ が存在して

$$\lim_i (x_i \cdot y_i) = (x \cdot y)_S$$
$$\lim_i (x_i \cdot z_i) = (x \cdot z)_S$$
$$\lim_i (z_i \cdot y_i) = (z \cdot y)_S$$

ところが命題 1.4 より、すべての i について

$$(x_i \cdot y_i) \geq \min\{(x_i \cdot z_i), (y_i \cdot z_i)\} - 27\delta$$

だからよい。

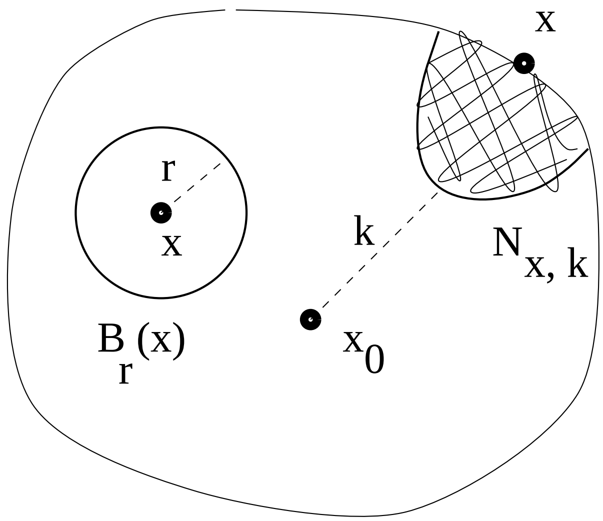

図 8: $\overline{X}$ の点 x の 近傍の定義

∎

よって、以後 $(\ \cdot\ )_S$を単に $(\ \cdot\ )$ とかく。

$$(\ \cdot\ ) : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

さて$\overline{X}$に位相を入れる。

定義 1.11 $x \in X, r > 0$ に対して

$$B_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

とする。$x \in \partial X, k > 0$ に対して

$$N_{x,k} = \{y \in \overline{X} | (x \cdot y) > k\}$$

とする。$\mathfrak{B} = \{B_r(x) | x \in X, r > 0\} \cup \{N_{x,k} | x \in \partial X, k > 0\}$ と定義。図８。

命題 1.8 $\mathfrak{B}$ は$\overline{X}$に位相を定める。その位相は Gromov 積の基点のとり方によらない。

証明　定義に従って確かめればよい。略。 ∎

注意 1.11 $\mathfrak{B}$ の定める$\overline{X}$上の位相について

$$(\ \cdot\ ) : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow R$$

は連続とは限らない。

定理 1.4 *1.* X は$\overline{X}$の *open dense* な部分集合である。

2. f を X の自己等長写像とする。
f は$\overline{X}$の自己同相写像$\overline{f}$に一意に拡張する。

3. $\overline{X}$はハウスドルフ

証明 すべて、$\overline{X}$の位相の定義から従う。 ∎

注意 1.12 $\{a_i\} \in S_\infty(X)$ に対して、$x = [\{a_i\}] \in \partial X = S_\infty/R$ とすると（以前これを $\lim_i a_i = x$ とかいた）、$\overline{X}$の位相について $\{a_i\}$ は x に収束する。よってこれを再び $\lim_i a_i = x$ とかく。

2 双曲群

2.1 群の双曲性

定義 2.1 G を有限生成群とし、$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ を生成元の集合とする。S は対称、すなわち $\{{s_1}^{-1}, \cdots, {s_n}^{-1}\} = \{s_1, \cdots, s_n\}$ を仮定する。G の S に関する **Cayley グラフ** $\Gamma(G; S)$ とは、次のように構成される一次元単体複体のことである。まず頂点集合 V は G 自身である。次に、各元 $g \in G$ と各生成元 $s \in S$ に対し、頂点 g と頂点 sg を辺で結ぶ。S は対称だから、sg から g へも s^{-1}に対応する辺が存在するが、これらは同一視する。S は G を生成するから、Γは連結である。$g \in G$ はΓに次のように作用する。下で $xg = g \cdot x$ とも書く.

$$
\begin{array}{rcl}
x \in V & \longmapsto & xg \in V \\
[x, sx] \in E & \longmapsto & [xg, sxg] \in E
\end{array}
$$

各辺に長さ *1* を与えΓを測地空間とする。この距離 d は S に関する**語距離** $(word - metric)$ と呼ばれる。$g \in G$ に対して

$$|g| = d(1, g)$$

と表す。$|1| = 0$ である。G のΓへの作用は等長的である。すなわち

$$d(h_1, h_2) = d(h_1 g, h_2 g)$$

がすべての $g, h_1, h_2 \in G$ について成立。

例 2.1 自由群の標準的な生成元に関する Cayley グラフは正規ツリーである。図９。

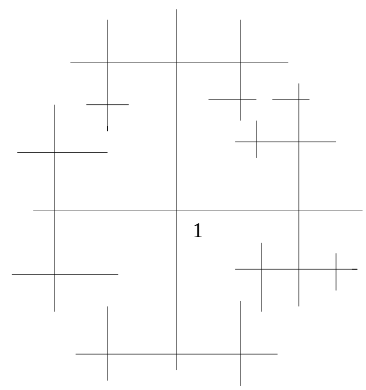

図 9: ２階の自由群の Cayley グラフ

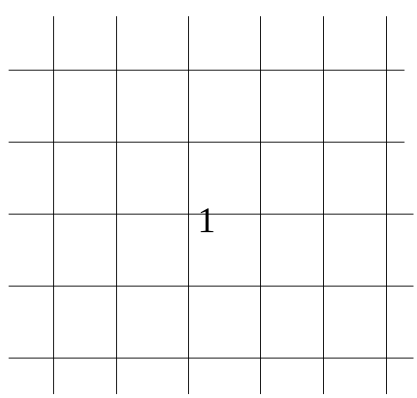

図 10: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の Cayley グラフ

例 2.2 $\mathbb{Z}^2$の生成元 $\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$ に関する Cayley グラフは、平面上の整数格子である。図１０。

次の命題は重要である。群 G が距離空間 X に作用しているとき、作用が **非連続的** とは 任意の点 $x \in X$ と任意の定数 $R > 0$ について次を満たす群 G の元 g の個数が有限のことである。

$$\{g \in G | d(x, gx) < R\}$$

命題 2.1 X を測地空間とする。有限生成群 G が X に等長的かつ非連続的に作用しているとする。もし X/G がコンパクトなら、X と $\Gamma(G; S)$ は擬等長的である。特に、コンパクトなリーマン多様体 M に対し $\tilde{M}$ と $\pi_1(M)$ は擬等長的である。

証明 まず、基点 $x \in X$ をとり、オービット集合 $G(x)$ を考える。X/G がコンパクトであることから包含写像 $G(x) \hookrightarrow X$ が擬等長的であることがわかる。つぎに写像 $G \to G(x), g \mapsto gx$ が擬等長的であることを示す。詳細は略。 ∎

定義 2.2 (G, S) を有限生成群とする。$\delta \geq 0$ について $\Gamma(G; S)$ が $\delta-$双曲的のとき (G, S) 又は単に G を $\delta-$**双曲的**という。ある $\delta \geq 0$ について G が $\delta-$双曲的なとき、G は**双曲的**という。

次の命題は群の双曲性は生成元のとり方に無関係であることを示している。

命題 2.2 (G, S) を $\delta-$双曲的とする。S' を他の生成元集合とするとき、$\delta' \geq 0$ が存在し、(G, S') は $\delta'-$双曲的である。

証明 定理 1.1 より $\Gamma(G; S)$ と $\Gamma(G; S')$ が擬等長的であることを示せばよい。明らかに包含写像 $G \hookrightarrow \Gamma(G; S)$ は擬等長的だから、恒等写像

$$\Gamma(G; S) \supset G \longrightarrow G \subset \Gamma(G; S')$$

が擬等長的である事を示せばよい。$S = \{s_1, \cdots, s_n\}, S' = \{s'_1, \cdots, s'_m\}$ とし、S に関する距離を d、S' に関する距離を d' とし、各 $g \in G$ について $|g| = d(1, g), |g|' = d'(1, g)$ とする。G の Γ への作用は等長的、推移的だから、ある K が存在して、すべての $g \in G$ について、$\frac{1}{K}|g|' \leq |g| \leq K|g|'$ を示せば十分（$\varepsilon = D = 0$ ととればよい）。$K_1 = \max(|s'_1|, \cdots, |s'_n|)$ とすると、明らかにすべての $g \in G$ について $|g| \leq K_1|g|'$. 同様に $K_2 = \max(|s'_1|, \cdots, |s'_m|)$ とすると、$|g|' \leq K_2|g|$. よって $K = \max(K_1, K_2)$ とすればよい。 ∎

注意 2.1 (G,S) が双曲的な時、その双曲定数δ自体はあまり意味をもたない。実際、ある定数 C が存在して次が成り立つ。G が双曲群なら、ある生成元集合 S が存在して (G,S) は $C-$双曲的である。

例 2.3 自由群は双曲的である。特に $\mathbb{Z}$ は双曲的。

例 2.4 有限群は双曲的である。

例 2.5 命題 *2.1* と例 *1.2* より M を閉負曲率リーマン多様体とすると、その基本群は双曲的である。

例 2.6 上より、種数 *2* 以上の閉曲面の基本群は双曲的。

例 2.7 $\mathbb{Z}^2$は双曲的でない。一般に G が $\mathbb{Z}^2$を部分群として含むと G は双曲的でない。この事実は明らかでない事に注意。$\mathbb{Z}^2$自身は双曲群ではないが、$\mathbb{Z}^2$を部分群として含むことは、双曲性にただちには矛盾しない。もし、$\mathbb{Z}^2$が擬凸な部分群であれば、G が双曲的でないことは明らか。一般に双曲群の可換な部分群 H は, 有限群であるか、$\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む. 特に,H 位数有限の元がなければ, 単位群または $\mathbb{Z}$ に同型であることが知られている.

例えば、M をコンパクトでないが体積有限な完備な負の定曲率 3 次元多様体とする。このとき、M は有限個のカスプを持つことが知られている。カスプをすべて取り除くと、コンパクトな部分が残り、よって$\pi_1(M)$ が有限生成であることがわかる。それぞれのカスプは位相的に (トーラス) $\times [0,\infty)$ であるが、トーラスの基本群 $\mathbb{Z}^2$が$\pi_1(M)$ の部分群となることが知られている。よって、$\pi_1(M)$ は双曲的でない。

例 2.8 $SL_2(\mathbb{Z})$ は双曲的である。これは、$SL_2(\mathbb{Z})$ が 有限生成の自由群を有限指数の部分群で含むという事実とこれから述べる命題 *2.3* から従う. 例 *2.16* も見よ。

定義 2.3 有限生成群 (G_1,S_1) と (G_2,S_2) について$\Gamma(G_1;S_1)$ と$\Gamma(G_2;S_2)$ が擬等長的なとき、(G_1,S_1) と (G_2,S_2) は**擬等長的**という。このとき、生成元集合 S_1、S_2のとり方は重要でないから、単に G_1 と G_2は**擬等長的**ともいう。

命題 2.3 G_1と G_2を有限生成群とする。もし、G_1が G_2の有限指数の部分群なら G_1と G_2は擬等長的である。

証明　群 G_2 の Cayley グラフを Γ_2とする。群 G_2, よって G_1 は Γ_2に 等長的かつ非連続的に作用している. ところが、Γ_2/G_1 は有限グラフであるから、命題 2.1 より、G_1は Cayley グラフ Γ_2, よって 群 G_2 に擬等長的である。 ∎

例 2.9 G を有限生成群、A を有限群とする。G と $G \times A$ は擬等長的である。

例 2.10 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$の指数 *2* の部分群であるから $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$は擬等長的である。二つの $\mathbb{Z}$ の生成元を a, b とすれば、 部分群 $\mathbb{Z}$ は ab で生成される。

次は明らかである。

命題 2.4 G_1と G_2を擬等長的な有限生成群とする。G_1が双曲群なら G_2も双曲的。

例 2.11 $\mathbb{Z}$ が双曲的だから $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$も双曲的。

例 2.12 一般に双曲群の有限指数の有限生成な部分群は双曲的である。又、双曲群を有限指数の部分群として含む群は双曲的である。

例 2.13 上より、G を双曲群、A を有限群とすれば $G \times A$ も双曲群。

2.2 擬凸部分群

定義 2.4 (G, S) を有限生成群とし、H を G の部分群とする。$\Gamma(G; S)$ の部分集合 H が擬凸のとき H を**擬凸な部分群** $(quasi-convex\ subgroup)$ という。

命題 2.5 G を双曲群とし、H をその擬凸な部分群とする。このとき、H は有限生成で、双曲的である。

注意 2.2 双曲群の有限表示な部分群で双曲的でないものの存在が知られている（*Bestvina-Brady [BB]* による。ある双曲群が, 有限生成だが有限表示でない部分群 H, を含むことを示した. 定理 *4.1* より H は双曲群でない）.

証明 S を G の生成元集合とする。$h \in H$ とし、$\gamma = s_1 \cdots s_n, s_i \in S$ を 1 と h を結ぶ$\Gamma(G; S)$ の測地線とする。(つまりγは頂点$1, s_1, s_1 s_2, \cdots, s_1 \cdots s_n$ を結ぶ測地線のこと）H は仮定より擬凸であるが、その擬凸定数を C としよう。すると$\gamma \subset N_C(H)$. よってすべての $i \quad (1 \leq i \leq n-1)$ に対して $|g_i| \leq C$ なる $g_i \in G$ が存在して $h_i = s_1 \cdots s_i g_i \in H$ となる。$g_0 = g_n = 1$ とすると、$h = \prod_{i=0}^{n-1}(g_i^{-1} s_{i+1} g_{i+1})$ とかける。$a_i = g_i^{-1} s_{i+1} g_{i+1}$とおくと、すべての i について $|a_i| \leq 2C + 1$ であり $a_i \in H$ である。よって

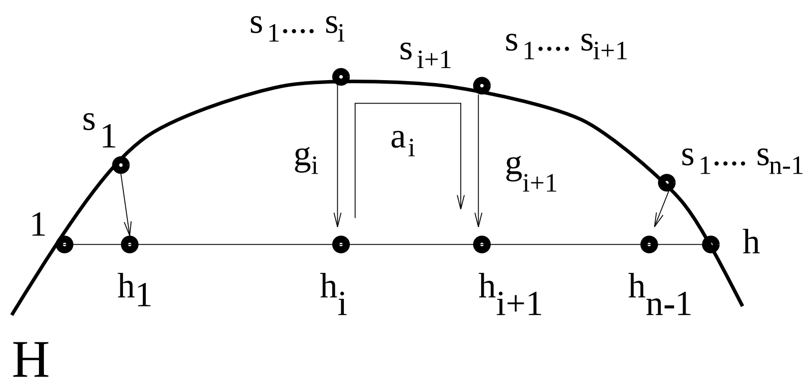

図 11: 双曲群の擬凸部分群は、双曲群である

$T = \{g \in G \mid |g| \leq 2C+1, g \in H\}$ とすれば、T は H を生成する。T は有限集合だから H は有限生成であることがわかった。図１１。

つぎに、H が双曲的であることを示す。$h \in H$ とすると、T の構成方法より

$$d_T(1,h) \leq d_S(1,h). \tag{1}$$

ただし d_Sは$\Gamma(G;S)$ での距離、d_Tは$\Gamma(H;T)$ での距離である。任意の $t \in T$ について $d_S(1,t) \leq 2C+1$ であるから、任意の $g \in G$ について

$$d_S(1,g) \leq (2C+1) d_{S\cup T}(1,g) \tag{2}$$

である。ただし $d_{S\cup T}$は$\Gamma(G;S\cup T)$ の距離。同じ理由で、任意の $h \in H$ について

$$d_S(1,h) \leq (2C+1) d_T(1,h). \tag{3}$$

明らかに $d_{S\cup T}(1,g) \leq d_S(1,g)$ だから、(1)、(2)、(3) より、任意の $h \in H$ について

$$\frac{1}{2C+1} d_{S\cup T}(1,h) \leq d_T(1,h) \leq (2C+1) d_{S\cup T}(1,h). \tag{4}$$

$\Gamma(H;T) \subset \Gamma(G;S\cup T)$ であるが、(4) は$\Gamma(H;T)$ の測地線が$\Gamma(G;S\cup T)$ の $(2C+1,0)-$擬測地線であることを示している。$\triangle$ を$\Gamma(H;T)$ の測地三角形とする。$\Gamma(G;S\cup T)$ は双曲的だから、ある$\delta \geq 0$ について、$\triangle$ は $\Gamma(G;S\cup T)$ の中でδ-slim。よって (4) より $\triangle$ は$\Gamma(H;T)$ の中で $(2C+1)\delta$-slim。 ∎

次の事実も知られている。証明は略す。

命題 2.6 G を双曲群とし、A と B を擬凸部分群とする。このとき、$A \cap B$ も G の擬凸部分群である。

注意 2.3 この事実は G の双曲性を仮定しないと成立しない。また、双曲空間の擬凸部分空間の交わりが擬凸というのも正しくない。

次の事実は重要である。命題 3.1 も見よ。

定理 2.1 G を双曲群とする。$g \in G$ を位数無限の元とすると、g の生成する部分群 $\langle g \rangle$ は $\mathbb{Z}$ に同型だが、この $\mathbb{Z}$ は G の擬凸な部分群である。

2.3 双曲群の初等性

定義 2.5 $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む群、又は有限群は双曲的であるが、そのような双曲群は**初等的** (*elementary*) とよばれる。

次の定理は重要である。証明はここではしない。定理 3.1 も見よ。

定理 2.2 G を初等的でない双曲群とする。このとき G は階数 2 の自由群 F_2を擬凸な部分群として含む。

注意 2.4 双曲群が階数 2 の自由群を部分群として含めば初等的でないことは明らか。

例 2.14 階数 2 以上の自由群は初等的でない双曲群である。

例 2.15 閉負曲率多様体の基本群は初等的でない双曲群である。

例 2.16 $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$、$PSL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$は初等的でない双曲群である。一般に A、B を有限群とし、C を A と B に共通な部分群で $C \neq A, C \neq B$ とする。このときこの融合積 $A *_C B$ は双曲群だが、これは、$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$を除いて初等的でない。

2.4 Combination Theorem

群において、二つの群を「はり合わせる」操作は重要である。二つの群 A, B をその共通な部分群 C で, はり合わせてできる群 $G = A *_C B$ を「融合積」(amalgamation) と呼ぶ. A, B が双曲群で C が有限のとき、 G も双曲群であることは既に述べた. 「幾何学的な考察」から、部分群 C が quasi-convex なら、同様な現象が成り立ちそうであるが、やや注意が必要である。クラインの壷の基本群 $G =< a, b | a^2 = b^2 >$は融合積と考

えられる．$A =< a >= \mathbb{Z}, B =< b >= \mathbb{Z}, C =< c >= \mathbb{Z}$ で、はりあわせは, $a^2 = c = b^2$．さて、A, B はともに hyperbolic で, C はどちらでも quasi-convex な部分群であるが、$G = A *_C B$ は hyperbolic ではない。実際, $a^2, ab \in G$ で生成される 部分群 $H < G$ は $\mathbb{Z}^2$に同型（クラインの壷の二重カバーであるトーラスの基本群）であり、指数は 2 である。よって G は hyperbolic でない。

群 G の部分群 C で $\mathbb{Z}$ に同型なものが *maximal* とは、$C < D < G$ かつ $D = \mathbb{Z}$ なら $C = D$ となること。上の例で, $C < A, C < B$ はともに maximal でない。実は、G が hyperbolic なら、任意の $\mathbb{Z} = C < G$ を含む maximal な $\mathbb{Z} = D < G$ の存在が知られている．これは一般には正しくない。例えば, 加群 $\mathbb{Q}$ では不成立．次が正しい．

定理 2.3 G, H を *torsion-free, hyperbolic* 群とする。$C = \mathbb{Z}$ を G, H の共通の部分群とし、G, H の両方で *maximal* とする。ことのき $G *_C H$ は *hyperbolic.*

この定理は証明なしで [Gr] に述べられている．証明は、Bestvina-Feighn [BF] によって、より一般の形で与えられた．一つ定義を与える．部分群 $H < G$ が *mal-normal* とは、任意の $g \in G - H$ に対して $gHg^{-1} \cap H = 1$. 群 G が torsoin-free, hyperbolic なとき、その maximal な無限巡回群 C は mal-normal であることが分かる．

定理 2.4 (Bestbina-Feighn combination theorem) G, H を *hyperbolic*群とする。C を G, H の共通の部分群とし、G, H の両方で *mal-normal* とする。ことのき $G *_C H$ は *hyperbolic.*

証明は容易でない。論文 [BF] を見よ．HNN-拡大にも同様の結果があり、それから特に, 円周上の種数２以上の閉曲面束 M が「一般的な」(pseudo-Anosov map による) はりつけで与えられる時, その基本群が hyperbolic であることが従う．もちろん、それ以前に Thurston は 3 次元多様体 M には双曲構造が入ることを示しているので、それより基本群は hyperbolic である。

3 初等的でない双曲群は階数 2 の自由群を含む

3.1 双曲的な元

Gを双曲群とし, Γ をその Cayley グラフとする。G の境界 (*boundary*)∂G を$\partial G = \partial \Gamma$ で定義する。この章では、Γのことを G、$\overline{\Gamma}$のことを$\overline{G}$とかく

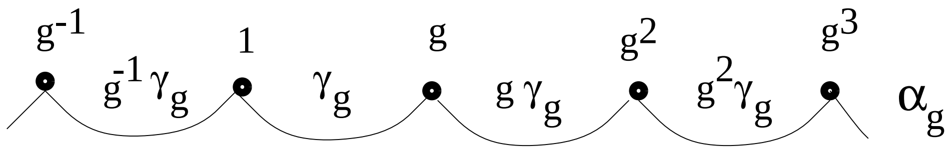

図 12: 双曲的な元 g は、擬測地線 α_g を定める

こともある。$1 \neq g \in G$ とし、$\gamma_g = [1, g]$ とする。g はΓに等長的に作用し、γ_gを g から g^2への測地線 $g \cdot \gamma_g$に移す。写像$\alpha_g : \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma$を

$$\alpha_g = \bigcup_{-\infty < n < \infty} g^n \cdot \gamma_g$$

で定義する。図１２。

定義 3.1 α_gが擬測地線のとき、g を**双曲的** (*hyperbolic*) という。

次の命題は重要である。証明は例えば Prop3.2[Sh] を見よ。

命題 3.1 G を双曲群とする。位数無限な元は双曲的である。

系 3.1 g を双曲群 G の位数無限な元とする。

1. $\langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}$ は G の擬凸部分群である。
2. $\{g^n\}_{n \geq 0}, \{g^{-n}\}_{n \geq 0} \in S_\infty(\Gamma)$ であり、$\lim_n g^n, \lim_n g^{-n} \in \partial G$ について

$$\lim_{n \to \infty} g^n \neq \lim_{n \to \infty} g^{-n}.$$

証明

1. 命題 3.1 よりα_gは擬測地線であり、Γは双曲的だからよい。
2. $S_\infty(\Gamma)$ の定義に従えばよい。

∎

定義 3.2

$$\begin{aligned} g^{+\infty} &= \lim_{n \to \infty} g^n \in \partial G \\ g^{-\infty} &= \lim_{n \to \infty} g^{-n} \in \partial G \end{aligned}$$

と書く。

命題 3.2 $g \in G$ を双曲群 G の双曲的な元とする（つまり、位数無限の元)。N_+を $g^{+\infty}$の$\overline{G}$における近傍、N_-を $g^{-\infty}$の$\overline{G}$におけるある近傍とする。このとき、ある $I > 0$ が存在して、すべての $i \geq I$ に対して

$$g^i(G \setminus N_-) \subset N+$$
$$g^{-i}(G \setminus N_+) \subset N_-.$$

証明　概略だけ述べる。同じことだから、十分大きな i に対して $g^i(G \setminus N_-) \subset N_+$だけ示す。命題 3.1 より $\{g^n\}_{-\infty<n<\infty}$は擬測地線$\alpha$を定める。$g$ は G（正確には$\Gamma(G)$ である）に等長的に作用し、αは $g-$不変である。まず十分大きな i に対して

$$g^i(\alpha \setminus N_-) \subset N_+ \tag{1}$$

は明らかである。一般の点 $x \in G$ については G からαへの射影（のようなもの）$P : G \longrightarrow \alpha$を考える。$P$ の定義は $x \in G$ に対し、x とαの距離を実現する点を対応させる。このような点は一つに定まらないが、このような点の集合の直径は、G の双曲定数δとαの擬測地定数 K, εで定まるある定数より小さい。さてαと P の定義よりある $C_1(K, \varepsilon, \delta) \geq 0$ が存在して、すべての $x \in G$ とすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d(P(g^n \cdot x), g^n \cdot P(x)) \leq C_1$$

が成立。(1) より、十分大きな i に対して

$$g^i(G \setminus N_-) \subset N_+$$

が言える。図１３。

∎

3.2　自由群の存在

定理 3.1 G を双曲群とする。もし G が初等的でなければ、G は階数 2の自由群を部分群として含む。

証明　概略。まず、一般に双曲群が無限群なら、位数無限の元があることが知られている。それを g としよう。g は $g^{\pm\infty} \in \partial G$ を定め、$g^{+\infty} \neq g^{-\infty}$ である。 ∎

補題 3.1 双曲的な元 $h \in G$ が存在して

$$\{h^{+\infty}, h^{-\infty}\} \cap \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\} = \phi$$

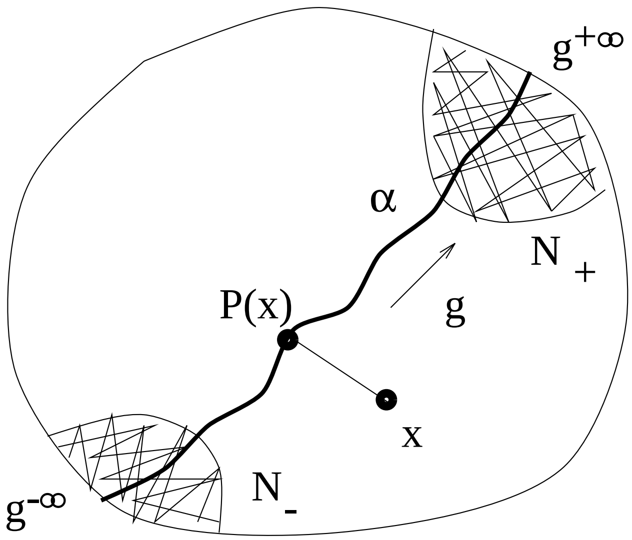

図 13: 双曲的な元 g は、軸α_g を "ずらす" ように作用する

証明　まず、任意の $a \in G$ について aga^{-1}は双曲的で、$(aga^{-1})^{\pm\infty} = a^{-1} \cdot g^{\pm\infty}$に注意。もし、すべての $a \in G$ について

$$\{(aga^{-1})^{+\infty}, (aga^{-1})^{-\infty}\} = \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\}$$

なら、G は初等的と結論されるので、矛盾。よってある $a \in G$ が存在して、$h = aga^{-1}$に対して、$\{h^{+\infty}, h^{-\infty}\} \neq \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\}$ が成立。$h^{+\infty} \neq g^{\pm\infty}$ としよう。この時自動的に $h^{-\infty} \neq g^{\pm\infty}$でもあることがわかる。はじめに $h^{-\infty} \neq g^{\pm\infty}$を仮定する場合も同様。よって $\{h^{\pm\infty}\} \cap \{g^{\pm\infty}\} = \phi$. ∎

定理の証明を続ける。$\overline{G}$はハウスドルフだから、$g^{\pm\infty}$の近傍 $N_\pm$と $h^{\pm\infty}$ の近傍 $M_\pm$が存在して、互いに交わらない。命題 3.2 より I が存在してすべての $i \geq I$ に対して

$$g^i(\overline{G} \setminus N_-) \subset N_+$$
$$g^{-i}(\overline{G} \setminus N_+) \subset N_-$$
$$g^i(\overline{G} \setminus M_-) \subset M_+$$
$$g^{-i}(\overline{G} \setminus M_+) \subset M_-$$

が成立。図１４。

以下で、g^Iと h^Iが自由群を生成すること、すなわち

$$\langle g^I, h^I \rangle \simeq F_2$$

を示す。$l = g^I, m = h^I$とかく。w を $l^{\pm1}, m^{\pm1}$の有限個の列で空でなく、さらに $ll^{-1}, l^{-1}l, mm^{-1}, m^{-1}m$ となる部分を含まないとする。示すべき

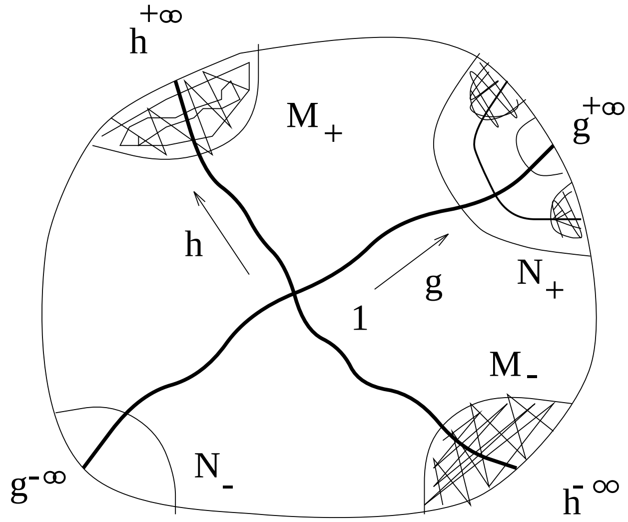

図 14: 双曲的な元 g と h による ピンポン

ことは w が G の元として $w \neq 1$ であることである。まず 1 は $N_\pm, M_\pm$に含まれないとしてよい。w を $1 \in \Gamma$に作用させてみる。I と $N_\pm, M_\pm$ のついての条件より

$$w \cdot 1 \in N_\pm \cup M_\pm.$$

よって、特に $1 \neq w \cdot 1$. これは、G の元として $w \neq 1$ を示している。従って、$\langle l, m\rangle \simeq F_2$ がわかった。 ∎

4　双曲群は線型の等周不等式をみたす

4.1　群の表示と等周不等式

　まず、群の表示について説明しよう。S を有限集合とし、$F(S)$ を S の生成する自由群とする。$F(S)$ の階数は S の位数である。ここで S の各元に $F(S)$ での逆元も付け加えて、それを改めて S と書こう。R を $F(S)$ の部分集合とし、$N(R)$ を R を含む $F(S)$ の正規部分群で最小のものとしよう。$F(S)/N(R)$ は群であるがこの群 G を $G = \langle S|R\rangle$ とかき、$\langle S|R\rangle$ を G の**表示** $(presentation)$ とよぶ。R が有限集合のとき、とくに**有限表示** $(finite\quad presentation)$ という。

例 4.1　*1.* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a^{\pm 1}, b^{\pm 1} | aba^{-1}b^{-1}\rangle$
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a^{\pm 1} | a^n\rangle$

3. $\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1^{\pm 1}, \cdots, a_g^{\pm 1}, b_1^{\pm 1}, \cdots, b_g^{\pm 1} | \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle$. ただし、$\Sigma_g$は種数 g の向き付けられた閉曲面である。

$G = \langle S|R \rangle$ を有限表示としよう。$w \in F(S)$ とし、$s_i s_i^{-1}$又は $s_i^{-1} s_i$ ($s_i \in S$) なる部分を w は含まないとする。このとき w は**既約** (*reduced*) という。このとき、w を表すために必要な S の元の数を $l(w)$ とかく。w が空のときは、$l(w) = 0$ とする。既約な $w \in F(S)$ が G で $w = 1$ としよう。定義から、$p_i \in F(X), r_i \in R, \varepsilon_i = \pm 1$ が存在して

$$w = \prod_{i=1}^{N} p_i r_i^{\varepsilon_i} p_i^{-1}$$

とかける。この等式は $F(X)$ の中でのことに注意。このような w の書き表し方の中で最小の N を $A(w)$ とかく。w が 空のときは、（G で $w = 1$ であるが）$A(w) = 0$ と定義する。

定義 4.1 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$に対して

$$f(n) = \sup\{A(w) | l(w) \leq n, G \text{ で } w = 1\}$$

と定義する。$f(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である。f を $\langle S|R \rangle$ の **Dehn 関数**とよぶ。例えば自由群については $f \equiv 0$ である。ある正数 C が存在してすべての n について

$$f(n) \leq Cn, Cn^2, \cdots$$

となるとき、表示 $\langle S|R \rangle$ は**線型、二次、$\cdots$ の等周不等式** *(linear, quadratic,... isoperimetric inequality)* をみたすという。$\langle S|R \rangle$ と $\langle S'|R' \rangle$ の Dehn 関数をそれぞれ f, f'とする。群として $\langle S|R \rangle = \langle S'|R' \rangle$ なら、ある正の整数 K が存在してすべての n について

$$f'(n) \leq K f(Kn)$$

となることがわかる。よって下の例のような表現は正当である。

例 4.2 *1.* 自由群は線型の等周不等式をみたす。

2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は *2* 次の等周不等式をみたすが線型の等周不等式はみたさない。（定理 *4.3* を見よ）

4.2 双曲群は有限表示である

定理 4.1 双曲群は有限表示である。

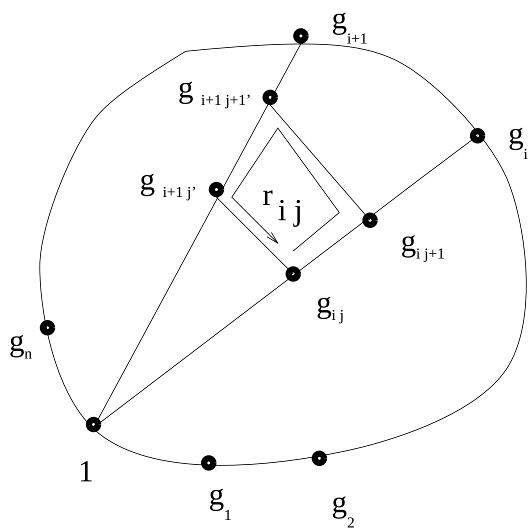

図 15: 双曲群は、有限表示である

証明　$\Gamma(G;S)$ を$\delta-$双曲的としよう。
$R = \{w \in F(S) | l(w) \leq 4\delta + 6$ かつ G の中で $w = 1\}$ とする。R は有限集合である。以下で、$G = \langle S|R \rangle$ であることを示す。
$w \in F(S)$ が G の中で $w = 1$ とする。$w \in N(R)$ を示せばよい。w は $\Gamma(G;S)$ の中の 1 を通る閉曲線とみなせる。w 上の G の元を 1 から順に $1 = g_0, g_1, g_2, \cdots, g_n, g_{n+1} = 1$ とする。測地線 $[1, g_i]$ 上の G の元を 1 から順に $1 = g_{i0}, g_{i1}, \cdots, g_{im_i} = g_i$ とする。測地三角形 $[1, g_i] \cup [g_i, g_{i+1}] \cup [g_{i+1}, 1]$ は$\delta-$slim だから、任意の i と j に対して、ある j'が存在して

$$d(g_{ij}, g_{i+1\,j'}) \leq \delta + 1.$$

$$r_{ij} = [g_{ij}, g_{i\,j+1}] \cup [g_{i\,j+1}, g_{i+1\,(j+1)'}] \cup [g_{i+1\,(j+1)'}, g_{i+1\,j'}] \cup [g_{i+1\,j'}, g_{ij}]$$

とすると、明らかに $r_{ij} \in R$ であり r_{ij}の構成法より

$$w \in N(r_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i).$$

よって $G = \langle S|R \rangle$ がいえた。従って G は有限表示である。図１５。 ∎

4.3　双曲性と線型等周不等式は同値

定理 4.1 より双曲群は有限表示だから Dehn 関数が定義される。この章の目的は次の定理を示すことである。

定理 4.2 双曲群は線型等周不等式をみたす。

実は定理 4.2 の逆も成り立つ。証明は例えば Th2.5 [Sh] を見よ。

定理 4.3 有限表示された群 $G = \langle S|R \rangle$ が線型の等周不等式をみたせば G は双曲的。

定理 4.2 と 4.3 より次がわかる。

定理 4.4 有限表示される群について双曲性と線型の等周不等式をみたすことは同値である。

証明（**定理** 4.2）まず、δは正の整数としてよい。$D = 600\delta$とおく。

$$A_0 = \max\{A(w) | w \text{ は } F(S) \text{ の既約な元で } G \text{ のなかで } w = 1, l(w) \leq 4D\}$$

とする。このような w は有限個だから $|A_0| < \infty$ である。$N(w) = \lfloor \frac{2l(w)}{D} \rfloor + 1$ とし、N に関する帰納法で

$$A(w) \leq 3N(w)A_0 \tag{1}$$

を示す。これは線型の等周不等式を導く:

$$A(w) \leq 6A_0 l(w)/D + 3A_0 \leq (6/D + 3)A_0 l(w).$$

まず、$N \leq 8$ の時は A_0の定義よりよい ($N(w) \leq 8$ なら $l(w) < 4D$. よって $A(w) \leq A_0$. 一方, $N(w) \geq 1$ より、よい). さて $N(w) \leq n$ をみたす全ての w について (1) が成立するとしよう。ただし、$n \geq 3$ としてよい。$w \in F(S)$ が $N(w) = n + 1$ で、G の中で $w = 1$ とする。w はΓの中の 1 を通る閉曲線とみなせる。それも w とかく。w 上の G の元 g で $d(1, g)$ が最大のものを g_0としよう。w 上の点で、g_0から w に沿って測った距離が D の 2 点を g_1と g_2とする。$n \geq 8$ より $l(w) \geq 4D$ に注意。このとき次が成り立つ.

$$d(g_1, g_2) \leq D + 16\delta. \tag{2}$$

ひとまず、これを仮定して証明を続けよう. 閉曲線 w の g_1から g_2への部分を $w(g_1, g_2)$ とかく。w において $w(g_1, g_2)$ を測地線 $[g_1, g_2]$ で置き換えて得られる閉曲線を w_1とし, $w_2 = w(g_1, g_2) \cup [g_2, g_1]$ とする (図 16). このとき, $l(w_1) \leq l(w) - D + 100\delta$より $N(w_1) \leq N(w) - 1$ である。従って帰納法の仮定より w_1について（１）が成立. すなわち $A(w_1) \leq 3N(w_1)A_0$.
一方、$l(w_2) \leq 3D + 100\delta \leq 4D$ だから $A(w_2) \leq A_0$. 従って

$$A(w) \leq A(w_1) + A(w_2) \leq 3N(w_1)A_0 + A_0 \leq 3(N(w) - 1)A_0 + A_0 \leq 3N(w)A_0.$$

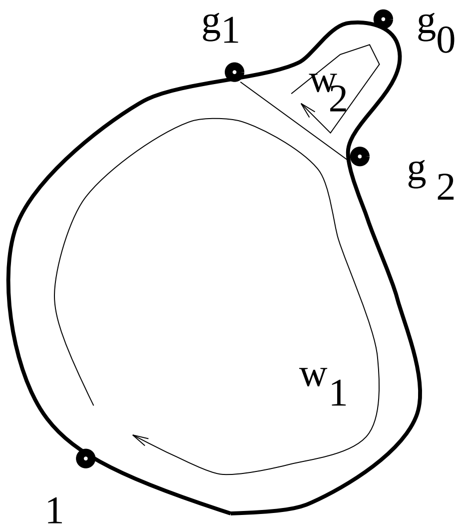

図 16: $w = w_1 + w_2$ と分解して、帰納法を使う

よって w に関しても (1) が成立。これで定理の証明が終る.

証明をとばした (2) を証明する。双曲群についての証明の前に, 自由群, すなわち Cayley グラフがツリーのの場合に証明する。この場合, $d(g_1, g_2) \leq D$ が成立することが、次のように分かる. まず、測地線 $[1, g_0], [g_1, g_2]$ の共通部分は、一点 g_0 でなく線分である。なぜなら, もし、一点なら、ツリーの性質から $d(1, g_0) < d(1, g_1)$ となり、g_0の取り方に矛盾. $[1, g_0] \cap [g_0, g_1] = [g_0, x_1]$ とする。同様の理由により、次も成立. $d(g_0, x_1) \geq d(g_1, x_1)$. さらに、$d(g_0, x_1) + d(g_1, x_1) = D$. 同じく, $x_2 \in [1, g_0]$ があって、$d(g_0, x_2) \geq d(g_2, x_2)$. さらに、$d(g_0, x_2) + d(g_2, x_2) = D$. ここで、$d(g_0, x_1) \leq d(g_0, x_2)$ としても一般性を失わない. このとき、

$$
\begin{aligned}
d(g_1, g_2) &= d(g_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(g_2, x_2) \\
&= d(g_1, x_1) + d(g_0, x_2) - d(g_0, x_1) + d(g_2, x_2) \\
&= D - d(g_0, x_1) + d(g_1, x_1) \leq D.
\end{aligned}
$$

一般の双曲群の場合は、測地三角形が一様に slim であることを使えばよい. 測地三角形 $(1, g_0, g_1), (1, g_0, g_1)$ に命題 1.2 を適用して、測地線 $[1, g_0]$ 上に g_1, g_2にそれぞれ対応する点 p_1, p_2をとる。このとき、

$$
\begin{aligned}
|g_1 - p_1| + |g_0 - p_1| &\leq |g_1 - g_0| + 8\delta \leq D + 8\delta, \\
|g_1 - p_1| &\leq |g_0 - p_1| + 8\delta, \\
|g_2 - p_2| + |g_0 - p_2| &\leq |g_2 - g_0| + 8\delta \leq D + 8\delta, \\
|g_2 - p_2| &\leq |g_0 - p_2| + 8\delta.
\end{aligned}
$$

ここで $|g_0 - p_2| \leq |g_0 - p_1|$ と仮定しても一般性を失わない．このとき、前と同様に、

$$\begin{aligned}
|g_1 - g_2| &\leq |g_1 - p_1| + |p_2 - p_1| + |g_2 - p_2| \\
&\leq |g_1 - p_1| + (|g_0 - p_2| - |g_0 - p_1|) + |g_2 - p_2| \\
&\leq D + 8\delta + |g_1 - p_1| - |g_0 - p_1| \leq D + 8\delta + 8\delta = D + 16\delta.
\end{aligned}$$

∎

5 その他

ここでは、双曲群についての基本的な事実をまとめる．

定理 5.1 G を双曲群とする。次は正しい．

1. G は有限表示．
2. G の語の問題, 共役問題は解ける．
3. $H < G$ を部分群とする．このとき、H は 有限群であるか、$\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric* であるか、階数 *2* の自由群 を部分群として含む．特に H が可換なら、有限群であるか、$\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric*. *(*群 H が $\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric* であることは、$\mathbb{Z}$ を指数有限な部分群として含むことと同値．このような群 H を *"virtually"* $\mathbb{Z}$ と呼ぶ．特に, H に位数有限の元がなければ, $\mathbb{Z}$ に同型）．
4. $H < G$ を部分群とする．このとき、H は $\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric* か、階数 *2* の自由群 を部分群として含む．
5. G は線形の等周不等式を満たす．
6. 位数有限の元を含まない双曲群について、同型問題は解ける．

(1),(3),(4),(5) は示した．(2) の語の問題は、1 次等周不等式 $A(w) \leq Cl(w)$ と関係がある。実際, さらに等周定数 C をあらかじめ評価できるのでよい。群 G の Cayley graph がδ-hyperbolic で、語の問題が解ければ, 共役問題は易しい．実際, ある計算できる定数 $C(n, m, \delta)$ が存在して, $|a| \leq n, |b| \leq m$ を満たす $a, b \in G$ が共役なら、実は, $|c| \leq C$ を満たすある $c \in G$ が存在して、$cac^{-1} = b$ となる。(6) は難しく, Gromov の論文 [Gr] では解決されていない。後に Sela [Se] が $\mathbb{R}$-tree を使って解決した．位数有限（特に 2）の元を含む場合は技術的に, 特別の扱いが必要なようである．

参考文献

[BB] M.Bestvina, N.Brady. Morse theory and finiteness properties of groups. Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 445–470.

[BF] M.Bestvina, M.Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. J. Differential Geom. 35 (1992), no. 1, 85–101.

[Bo] B.H. Bowditch, Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces, in "Group Theory from a Geometrical Viewpoint" edit by H. Ghys and others, World Scientific, 1991, 64-167.

[LS] R. Lyndon, P. Schupp, *Combinatorial Group Theory,* Springer, 1977.

[Gr] M. Gromov, Hyperbolic groups, in "Essays in Group Theory" edit. by S.M. Gersten, MSRI Publ. Vol 8, Springer, 1987, 75-263.

[Co-P] M. Coornaert, A. Papadopoulos, *Symbolic Dynamics and Hyperbolic Groups,* Lect. Note in Math 1539, Springer, 1993.

[Se] Z.Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 2, 217–283.

[Sh] H. Short and others, Notes on word hyperbolic groups, in "Group Theory from a Geometrical Viewpoint" edit by H. Ghys and others, World Scientific, 1991, 3-63.